Espaces euclidiens et hermitiens

Espaces euclidiens

Exercice 1. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E et $\mathcal{S}^+$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E dont toutes les valeurs propres sont positives.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $f^* \in \mathcal{L}(E)$ son adjoint. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f^*)^\perp$.
2. Soit $f \in \mathcal{S}$.
   (a) Montrer que $f \in \mathcal{S}^+$ si, et seulement si,
   $$\forall x \in E, \langle f(x), x \rangle \geqslant 0.$$
   (b) On suppose que $f \in \mathcal{S}^+$. Montrer que $x \in E$ appartient à $\mathrm{Ker}(f)$ si, et seulement si,
   $$\langle f(x), x \rangle = 0.$$
3. Soient $f, h \in \mathcal{S}^+$ tels que $h - f \in \mathcal{S}^+$. Montrer que $\mathrm{Ker}(h) \subset \mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(h)$.
4. Soient $f, g \in \mathcal{S}^+$. Montrer que $\mathrm{Ker}(f+g) = \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}(f+g) = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$.
5. Soit $f \in \mathcal{S}$ de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. On note $|||f||| = \sup\limits_{\|x\|=1} \{|\langle f(x), x \rangle|\}$. Montrer que
   $$|||f||| = \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}.$$
   En déduire que si $g, h \in \mathcal{S}^+$ avec $h - g \in \mathcal{S}^+$, alors $|||g||| \leqslant |||h|||$.

Espaces hermitiens

Dans les exercices suivants, $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace hermitien de dimension n.

Exercice 2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est normal si, et seulement si, il existe $P \in \mathbf{C}[X]$ tel que $u^* = P(u)$.

Exercice 3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que si, pour tout $x \in E$, $\langle f(x), x \rangle = 0$, alors f est nul.
   Ce résultat est-il toujours valable dans un espace euclidien ?
2. Montrer que $f = f^*$ si, et seulement si, $\langle f(x), x \rangle \in \mathbf{R}$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

Exercice 4.
1. Soit u un endomorphisme de E tel que $|||u||| := \sup_{\|x\|=1}\{\|u(x)\|\} \leqslant 1$.
   (a) Montrer que $|||u^*||| \leqslant 1$.
   (b) Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $|\lambda| = 1$,
   $$\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}) = \mathrm{Ker}(u^* - \bar{\lambda}\mathrm{id}).$$
2. Déterminer les endomorphismes u de E tels que $|\det u| = 1$ et $|||u||| \leqslant 1$.