Université de Rennes 1 – 2013/2014

Agrégation-Compléments d'analyse-TD 3

Exercice 1. (Transformée de Fourier d'un polynôme) Soit $P = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$ un polynôme, considéré comme élément dans $\mathcal{S}'$. Calculer la transformée de Fourier de P.

Exercice 2. (Formule sommatoire de Poisson) La distribution $T = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \delta_k$ est une distribution dans $\mathcal{S}'$ (voir Exercice 7, feuille de TD 1). Montrer que la transformée de Fourier de T est $\hat{T} = \sqrt{2\pi} \sum_{k\in\mathbf{Z}} \delta_{2\pi k}$

Exercice 3. (Impossibilité de la multiplication des distributions) Montrer que l'on ne peut pas définir un produit $(T, S) \mapsto T \cdot S$ dans $\mathcal{S}'$ qui soit commutatif, associatif et tel que $T_f \cdot S = fS$ pour tout $S \in \mathcal{S}'$ et toute fonction $f \in \mathcal{O}_M$ (on rappelle que ceci signifie que f ainsi que toutes ses dérivées est C^∞ et à croissance polynomiale).

Indication: Considérer les distributions δ, $\mathrm{vp}(1/x)$ et la fonction $f(x) = x$.

Exercice 4. (Espace de Sobolev) On désigne par H^1 l'espace des fonctions $f \in L^2(\mathbf{R})$ telles que leur dérivée $\frac{df}{dx}$ au sens des distributions soit dans $L^2(\mathbf{R})$ également. On munit H^1 du produit scalaire

$$(f, g) = \int_{\mathbf{R}} f\bar{g}\,dx + \int_{\mathbf{R}} \frac{df}{dx}\overline{\frac{dg}{dx}}\,dx.$$

On notera $\|f\|_{H^1}$ la norme associée.

(i) Montrer que H^1 est un espace de Hilbert.

(ii) Soit $T = T_f \in \mathcal{S}'.$ Montrer $T \in H^1$ si et seulement si la fonction $y \mapsto (1 + y^2)^{1/2}\hat{f}(y)$ appartient à $L^2(\mathbf{R}).$

(iii) Pour $f \in H^1$, on pose $\|f\|^2 := \int_{\mathbf{R}}(1+y^2)|\hat{f}(y)|^2 dy.$ Montrer que $f \mapsto \|f\|$ une norme équivalente à la norme $f \mapsto \|f\|_{H^1}.$

Exercice 5. (Calcul d'une transformée de Fourier dans $\mathbf{R}^2$) On considère la distribution $T \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2)'$ définie par

$$\langle T, \varphi\rangle = \int_{\mathbf{R}} \varphi(x, x)\,dx.$$

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2).$ Pour tout $\epsilon > 0,$ on pose

$$I_\epsilon = \int_{\mathbf{R}} e^{-\epsilon x^2}\hat{\varphi}(x, x)\,dx.$$

(i) Montrer que $\langle \hat{T}, \varphi\rangle = \lim_{\epsilon\to 0} I_\epsilon.$

(ii) Montrer que

$$I_\epsilon = \int_{\mathbf{R}^2} e^{-\eta^2}\varphi(\xi, 2\sqrt{\epsilon}\,\eta - \xi)\,d\xi\,d\eta.$$

(iii) Montrer que

$$\langle \hat{T}, \varphi\rangle = \sqrt{2\pi}\int_{\mathbf{R}} \varphi(\xi, -\xi)\,d\xi.$$