Université de Rennes 1

Agrégation/Année 2013/2014

Compléments d'analyse–Distributions tempérées–TD1

1 - Soit δ' la distribution tempérée définie par $\delta'(\varphi) = -\varphi'(0)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$. Montrer qu'il n'existe pas de mesure μ sur $\mathbf{R}$ telle que $\delta'(\varphi) = \int_{\mathbf{R}} \varphi(x) d\mu(x)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$.

2 - Montrer que les formes linéaires suivantes définissent des distributions tempérées

(i) $\mathrm{vp}(1/x) : \mathcal{S}(\mathbf{R}) \ni \varphi \mapsto \lim_{\to 0} \left(\int_{|x|\geq} \frac{'(x)}{x} dx \right)$.

(ii) $\mathrm{pf}(1/x^2) : \mathcal{S}(\mathbf{R}) \ni \varphi \mapsto \lim_{\to 0} \left(\int_{|x|\geq} \frac{'(x)}{x^2} dx - 2\frac{'(0)}{} \right)$.

(ii) $\mathrm{pf}(H/x^2) : \mathcal{S}(\mathbf{R}) \ni \varphi \mapsto \lim_{\to 0} \left(\int_0 \frac{'(x)}{x^2} dx - \frac{'(0)}{} + \varphi'(0) \log \epsilon \right)$.

3 - Soit $f(x) = \log(|x|)$. Montrer que la forme linéaire

$$T_f : \mathcal{S}(\mathbf{R}) \ni \varphi \mapsto \int_{\mathbf{R}} f(x)\varphi(x)dx$$

définit une distribution tempérée. Calculer $\frac{d}{dx} T_f$.

4 - Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$. Pour $a \in \mathbf{R}$, dfinissons $\tau_a \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ par $\tau_a\varphi(x) = \varphi(x-a)$. Montrer que pour tout $p \in \mathbf{N}$, il existe $C > 0$ tel que, pour tout $a \in \mathbf{R}$, on a $\sum_{k=0}^{p} \sup_{x\in\mathbf{R}} |x^k (\tau_a\varphi)^{(k)}(x)| \leq C(1+|a|)^p$.

5 - Soit $f \in C^\infty(\mathbf{R})$ la fonction définie par $f(x) = e^x$. Montrer qu'il n'existe pas de distribution tempérée $T \in \mathcal{S}'$ telle que $T(\varphi) = \int_{\mathbf{R}} f(x)\varphi(x)dx$ pour toute $\varphi \in \mathcal{S}$.

Indication: Par l'absurde, supposons le contraire. On pourra fixer une fonction $' \in \mathcal{S}$ positive avec support contenu dans $]-1;1[$, appliquer T aux translatées de $'$ et utiliser l'exercice 4

6 - Soit $f \in C^\infty(\mathbf{R})$ la fonction définie par $f(x) = e^x \cos(e^x)$. Montrer que:

- il n'existe pas de polynôme P sur $\mathbf{R}$ avec
$$|f(x)| \leq |P(x)| \qquad \text{pour tout} \quad x \in \mathbf{R}$$
- la forme linéaire $T_f : \mathcal{S}(\mathbf{R}) \ni \varphi \mapsto \int_{\mathbf{R}} f(x)\varphi(x)dx$ est une distribution tempérée.

7 - Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit $T_n \in \mathcal{S}'(\mathbf{R})$ définie par $T_n = \sum_{k=-n}^{n} \delta_k$. Montrer que $(T_n)_n$ converge dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ vers une distribution tempérée, notée $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n$.

8 - (i) Soit $\varphi \in \mathcal{S}$ avec $\varphi(0) = 0$. Montrer qu'il existe $\psi \in \mathcal{S}$ telle que $\varphi(x) = x\psi(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

(ii) Soit $n \geq 2$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ avec $\varphi(0) = 0$. Montrer qu'il existe $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \mathcal{S}$ telle que $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k \psi_k(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}^n$.

9 - Montrer que les solutions $T \in \mathcal{S}'$ de l'équation $xT = 0$ sont les multiples de la distribution δ de Dirac.