Université de Rennes 1– 2013/2014

Agrégation-Compléments d'analyse-TD 2

Exercice 1. Pour $\epsilon > 0$, soit f_ϵ la fonction sur $\mathbf{R}$ de nie par $f_\epsilon(x) = x/(x^2 + \epsilon^2)$. Montrer que $\lim_{\epsilon\to 0} T_{f_\epsilon}$ = vp($1/x$) dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$, ou vp($1/x$) est la distribution temperee de nie dans la feuille de TD 1, Exercice 2.

Exercice 2. (**Dérivée de** vp($1/x$)) Calculer la derivee dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ de la distribution vp($1/x$).

Exercice 3. (**Valeurs de** $1/z$ **sur l'axe réel**) Pour $\epsilon > 0$, on considere les fonctions continues et bornees f_ϵ^+ et f_ϵ^- de nies sur $\mathbf{R}$ par $f_\epsilon^+(x) = 1/(x - i\epsilon)$ et $f_\epsilon^-(x) = 1/(x + i\epsilon)$.
Montrer que les limites $\lim_{\epsilon\to 0} T_{f_\epsilon^+}$ et $\lim_{\epsilon\to 0} T_{f_\epsilon^-}$ existent dans $\mathcal{S}'$ et, qu'en notant ces limites par $\frac{1}{x+i0}$ et $\frac{1}{x-i0}$,on a

$$\frac{1}{x+i0} = \mathrm{vp}(1/x) - i\pi\delta \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{x-i0} = \mathrm{vp}(1/x) + i\pi\delta.$$

Exercice 4. (**Formule des sauts pour un demi-espace**) Pour $n \geq 2$, soit $D = \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}_+$ le demi-espace $\{x_n \geq 0\}$. Soit $f(x) = f(x', x_n)$ une fonction dans $C^1(D)$ telle que $|f|$ soit bornee par un polynome. Soit F la fonction sur $\mathbf{R}^n$ qui est egale a f sur D et nulle ailleurs. On souhaite calculer les derivees $\partial/\partial x_i(F)$ au sens des distributions.
(i) Soit $i \neq n$. Montrer que $\frac{\partial F}{\partial x_i} = T_{\{\partial/\partial x_i(F)\}}$, ou $\{\partial/\partial x_i(F)\}$ designe la fonction qui est egale a $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sur D et 0 ailleurs.
(ii) Montrer que

$$\frac{\partial F}{\partial x_n} = T_{\{\partial/\partial x_i(F)\}} + f(x', 0)\delta_{\{x_n=0\}},$$

ou $f(x', 0)\delta_{\{x_n=0\}}$ est la distribution dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ de nie par

$$\langle f(x', 0)\delta_{\{x_n=0\}}, \varphi\rangle = \int_{\mathrm{R}^{n-1}} f(x', 0)\varphi(x', 0)dx', \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n).$$

(iii) Calculer F au sens des distributions quand f est C^2 sur D. En deduire une formule (\formule de Green") pour $\int_D (f \quad \varphi - \varphi \quad f)dx$ pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$.

Exercice 5. Soit $P \in \mathbf{C}[X_1, \ldots, X_n]$ tel que $P(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}^n$. Soit $P(D)$ l'operateur di erentiel associe a P. Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ tel que $P(D)T = 0$ Montrer que $T = T_f$ pour une fonction polynomiale f sur $\mathbf{R}^n$

Indication: On utilisera, sans le demontrer, le fait qu'une distribution dont le support est egal a $\{0\}$ est une combinaison lineaire de derivees de la distribution de Dirac δ.

Exercice 6. (**Transformée de Fourier de** vp($1/x$)) Pour $\epsilon > 0$, soit g_ϵ la fonction sur $\mathbf{R}$ de nie par $g_\epsilon(x) = -e^{\epsilon x}$ si $x < 0$ et $g_\epsilon(x) = e^{-\epsilon x}$ si $x \geq 0$
(i) Montrer que $\lim_{\epsilon\to 0} T_{g_\epsilon} = T_{\mathrm{sgn}}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$, ou sgn est la fonction signe.
(ii) Calculer la transformee de Fourier $\mathcal{F}(g_\epsilon)$ de g_ϵ.
(iii) Determiner $\mathcal{F}$(vp($1/x$)) en utilisant (ii) et l'exercice 1.

Exercice 7. (**Transformée de Fourier de la fonction de Heaviside**) Calculer la transformee de Fourier $\mathcal{F}(H)$ de la fonction de Heaviside H.
Indication: On pourra utiliser l'exercice 6.

Exercice 8. (**Transformée de Fourier de** vp($1/x$)**-bis**) Calculer la transformee de Fourier $\mathcal{F}$(vp($1/x$)) de vp($1/x$), en utilisant le fait que $x$vp($1/x$) = 1.