

Université de Rennes 1

Année 2013/2014

Agrégation–Préparation à l’écrit-TD1

Dans toute la suite \mathbb{F}_q dénote le corps fini à q éléments.

1 - Montrer que $GL_2(\mathbb{F}_2)$ est isomorphe au groupe symétrique \mathfrak{S}_3 . (*Indication*: Faire opérer $GL_2(\mathbb{F}_2)$ sur \mathbb{F}_2^2 .)

2 - Soient $\mathbb{K} = \mathbb{F}_3$ et $E = \mathbb{F}_3^2$;

(i) Construire, au moyen des 4 droites vectorielles D_1, D_2, D_3, D_4 de E , un homomorphisme surjectif $\epsilon : GL_2(\mathbb{F}_3) \rightarrow \mathfrak{S}_4$.

(ii) Montrer que ϵ induit un isomorphisme entre $PSL_2(\mathbb{F}_3)$ et le groupe alterné \mathfrak{A}_4 .

(iii) En déduire que $SL_2(\mathbb{F}_3)$ n’est pas parfait (Un groupe G est parfait s’il coïncide avec le sous-groupe $[G, G]$ engendré par les commutateurs.)

3 - Soit $n \in \mathbb{N}$ et E un espace vectoriel sur \mathbb{F}_q de dimension n . Pour un entier m avec $0 \leq m \leq n$, on note X_m l’ensemble des m -tuplets $(x_1, \dots, x_m) \in E^m$ formés de m vecteurs linéairement indépendants.

(i) Calculer $|X_m|$. En déduire $|GL_n(\mathbb{F}_q)|$.

(ii) Combien y-a-t-il de droites vectorielles dans E ?

(iii) Soit $G_{n,m}$ l’ensemble des sous-espaces vectoriels de E de dimension m . Trouver une formule pour $|G_{n,m}|$. (*Indication*: $GL_n(\mathbb{F}_q)$ opère transitivement sur $G_{n,m}$.)

4 - Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , on munit $M_n(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^{n^2}$ de la topologie standard.

(i) Montrer que $GL_n(\mathbb{Q})$ est dense $GL_n(\mathbb{R})$ et que $SL_n(\mathbb{Q})$ est dense $SL_n(\mathbb{R})$.

(ii) Montrer que $GL_n(\mathbb{C}), SL_n(\mathbb{C})$ et $SL_n(\mathbb{R})$ sont connexes par arcs et que $GL_n(\mathbb{R})$ n’est pas connexe.

5 - Soit $n \geq 1$ un entier et $\Gamma = SL_n(\mathbb{Z})$. Pour un nombre premier p , on considère l’homomorphisme $\varphi_p : \Gamma \rightarrow SL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ induit par la réduction modulo p , i.e. $\varphi_p((a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}) = (\bar{a}_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, où \bar{a} désigne la classe de $a \in \mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

(i) Montrer que φ_p est surjectif.

(ii) On note Γ_p le noyau de φ_p . Quel est l’indice de Γ_p dans Γ ?

(iii) On suppose que $p \geq 3$. Montrer que Γ_p ne possède pas d’élément d’ordre fini distinct de l’identité.

(iv) En déduire que Γ ne possède, à isomorphisme près, qu’un nombre fini de sous-groupes finis.

6 - Soit $n \geq 2$, et soit $a = (a_1, \dots, a_n)^t \in \mathbb{Z}^n$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) il existe une matrice $A \in SL_n(\mathbb{Z})$ dont la première colonne est a .

(ii) $\text{pgcd}(a_1, \dots, a_n) = 1$.