Université de Rennes 1 **Année 2013/2014**

Agrégation–Préparation à l'écrit-TD2

1 - Montrer que $PSL_2(\mathbf{F}_4)$ est isomorphe à $\mathfrak{A}_5$.
Indication: Faire opérer $PSL_2(\mathbf{F}_4)$ sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{F}_4)$. Quel est le cardinal de $PSL_2(\mathbf{F}_4)$?

2 - Montrer que $PGL_2(\mathbf{F}_5)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_5$ et que $PSL_2(\mathbf{F}_5)$ est isomorphe à $\mathfrak{A}_5$.

3 - (i) Montrer que groupe $SL_2(\mathbf{Z})$ est engendré par les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Indication: Pivot de Gauss et algorithme d'Euclide.
(ii) Soit $n \geq 2$. Montrer que $SL_n(\mathbf{Z})$ est engendré par l'ensemble des matrices T_{kl} pour $k, l \in \{1, \ldots, n\}$, $k \neq l$, où T_{kl} est la matrice $(a_{ij})_{1 \leq i,j, \leq n}$ avec $a_{ii} = 1$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $a_{kl} = 1$ et $a_{ij} = 0$ sinon.
Indication: Récurrence sur n et Exercice 6 du TD 1.

4 - Soit K un corps et soit $f : \mathbf{P}^n(K) \to \mathbf{P}^n(K)$ une homographie. On suppose que n est pair et que K est $\mathbf{C}$ ou $\mathbf{R}$. Montrer que f possède un point fixe.

5 - Soit K un corps. Quelles sont les homographies de $\mathbf{P}^1(K)$ qui possèdent un seul point fixe? Quelles sont celles qui possèdent exactement deux points fixes?

Dans le cas $K = \mathbf{R}$, quelles sont celles qui ne possèdent aucun point fixe?

6 - Soit K un corps et soient f, g deux homographies de $\mathbf{P}^1(K)$ ayant chacune deux points fixes distincts. Montrer que $fg = gf$ si et seulement si f et g possèdent les mêmes points fixes.

7 - Soit $\mathbf{K}$ un corps et a_1, a_2, a_3 dans $\mathbf{K}$ deux à deux distincts. Calculer explicitement les birapports $[a_1, a_2, a_3, \infty]$, $[a_1, a_2, \infty, a_3]$, $[a_1, \infty, a_2, a_3]$ et $[\infty, a_1, a_2, a_3]$.