Université de Rennes1 **Année 2013-2014**

Préparation Agrégation Externe

Feuille d'exercices 1

Exercice 1 Etant donnée un ensemble P de n points du plan, on appelle diamètre de P tout segment dont les extrémités sont dans P et dont la longueur est maximale. On souhaite montrer qu'il y a toujours au plus n diamètre.

1. Montrez que deux diamètres s'intersectent toujours.
2. On appelle valence d'un point le nombre de diamètre dont il est une extrémité.
   (a) montrez que si tous les points de P sont de valence $\leqslant 2$, alors le nombre de segments de P est $\leqslant n$.
   (b) Montrez que si un point de P est de valence $k > 2$ alors les extrémitéés de $k-2$ des diamèètres issus de A sont monovalentes.
   (c) Conclure, par une réccurence sur n, que $d(n) \leqslant n$.
3. Montrer que la borne $d(n) = n$ est atteinte pour tout $n \geqslant 3$
4. On suppose que les points sont tous de valence 2. Montrez que la borne $d(n) = n$ est atteinte si et seulement si n est impair.

Exercice 2 .

1. Soit $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une forme quadratique et $V_q = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, q(x) = 0\}$. Montrer que $V_q - \{0\}$ est soit connexe soit a deux composantes connexes symétriques l'une de l'autre par rapport à l'origine.
2. Soient f et g deux formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$ et $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $\phi(x) = (f(x), g(x))$. On se propose de montrer que $\phi(\mathbb{S}^{n-1})$ est un convexe (compact) de $\mathbb{R}^2$, où $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$.
3. Montrez, en considérant $f(x,y) = x^2 - y^2$ et $g(x,y) = 2xy$, que ce résultat n'est pas vrai pour $n = 2$.
   Qu'en est-il de l'image de la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$ $(n \geqslant 3)$ par k ($k \geqslant 3$) formes quadratiques ?
4. a) On suppose pour la suite que $n \geqslant 3$. Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ tels que $f(x) = f(y) = 0$ et $g(x).g(y) > 0$. Montrer qu'il existe $z \in \mathbb{R}^n$ tel que :
   $\|z\| = 1$ et $f(z) = g(z) = 0$.
   b) Soit $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application affine.
   Montrer que $P(\phi(\mathbb{S}^{n-1})) = \tilde{\phi}(\mathbb{S}^{n-1})$.
   où $\tilde{\phi} = (\tilde{f}, \tilde{g})$ avec $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ des formes quadratiques.

c) On suppose $\phi(\mathbb{S}^{n-1}) - \{(0,0)\}$ non vide.
Soit $A, B \in \phi(\mathbb{S}^{n-1})$, $A \neq B$.
Soit C un point du segment $[A, B]$. Montrez qu'il existe un isomorphisme affine $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tel que
$P(C) = (0,0)$, $P(A) = (0,1)$ et $P(B) = (0, \alpha)$ avec $\alpha < 0$.

d) En éduire, en utilisant b), que $C \in \phi(\mathbb{S}^{n-1})$.

5. Application : Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$. On appelle image numérique de A, le sous-ensemble $R(A)$ de $\mathbb{C}$ défini par

$$R(A) := \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} z_i \bar{z_j} \mid \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 = 1 \right\}.$$

Montrez que $R(A)$ est convexe.