

Préparation Agrégation Externe

Exercices

Exercice 1 Montrez qu'un polytope possède au moins deux faces ayant le même nombre de côtés.

- Exercice 2**
1. Montrez qu'un n -simplexe d'un espace euclidien possède une unique sphère circonscrite.
 2. Calculer le volume d'un n -simplexe.
 3. Montrez qu'un n -simplexe d'un espace euclidien possède une unique sphère inscrite, déterminer son centre et son rayon en fonction des volumes du simplexe et de ses faces.

Exercice 3 Soit n un entier ≥ 3 . Soit Δ_n un n -simplexe d'un espace euclidien de dimension n . Une quasi-médiane est droite joignant l'isobarycentre d'une $(n-2)$ -face au milieu de l'arête opposée.

1. Montrez que les quasi-médianes de Δ_n se coupent en G , l'isobarycentre de Δ_n , dans un rapport de $\frac{2}{n-1}$.
2. Dans un simplexe, on appelle *orthohyperplan* un hyperplan orthogonal à une arête et passant par l'isobarycentre de la $(n-2)$ -face opposée.

Montrez que les orthohyperplans se coupent en un point M appelé *point de Monge* du n -simplexe, et qu'on a la relation d'Euler $\overrightarrow{OM} = \frac{n+1}{n-1} \overrightarrow{OG}$ où O est le centre de la sphère circonscrite.