UFR Mathématiques
Université Rennes I

Préparation à l'agrégation
2013/2014

TD d'Analyse 1: Series de fonctions

Exercice 1 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$u_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}.$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(u_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$.

2. (a) Déterminer le domaine de convergence D de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$. Prouver que pour tout $a > 0$, cette série converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

   (b) Pour $x \in D$, on pose

   $$f(x) = \sum_{n\geq 1} u_n(x).$$

   Montrer que u_n est continue sur $D\backslash\{0\}$.

3. (a) En comparant la série numérique $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$, $x > 0$ à une intégrale, prouver que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \pi/2$.

   (b) Existe-t-il un voisinage de 0 sur lequel la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge uniformément ?

Exercice 2

1. (a) Etablir la convergence uniforme sur $]0, +\infty[$ de la série

   $$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}.$$

   (b) Soit g la somme de cette série. Prouver que g est continue sur $]0, +\infty[$, que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ et que $\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$.

2. Montrer que g est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

3. Etablir que $g(x) = \frac{1}{ex} - \frac{1}{ex^2} + o(\frac{1}{x^2})$ quand $x \to +\infty$.

$\boxed{\text{Exercice 3}}$

1. Determiner le domaine de définition de

$$f(x) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}.$$

2. Montrer que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

3. Montrer que f est solution sur $]0, +\infty[$ d'une équation différentielle du premier ordre qu'on explicitera; en déduire que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition.

$\boxed{\text{Exercice 4}}$

On se propose d'étudier la convergence de la série trigonométrique, ci-dessous notée S:

$$\sum_{n\geq 1} a_n \sin nx$$

où $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite de réels strictement positifs qui tend vers 0 en décroissant.

1. (a) Montrer que S converge simplement sur $[0,\, \pi]$ et uniformément sur tout intervalle $[\eta, \pi]$, $0 < \eta < \pi$.
   (b) A quelle condition S est-elle normalement convergente sur $[0,\, \pi]$?

2. On suppose dans cette question que S converge uniformément sur $[0, \pi]$.
   (a) Soit S_n la somme partielle d'indice n de S. Pour $l \geq 1$ et $x_l = \frac{\pi}{4l}$, montrer que

$$S_{2l}(x_l) - S_l(x_l) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} l a_{2l}.$$

   (b) Montrer que $\lim_l l a_{2l} = 0$. Conclure que $\lim_k k\, a_k = 0$.

3. On va établir la réciproque de l'assertion de la question 2. On suppose donc que

$$\lim_k k a_k = 0.$$

   On pose pour $n \geq 1$:

$$\varepsilon_n = \sup\{k a_k,\, k \geq n\}, \quad V_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin\, kx, \quad R_n(x) = \sum_{k\geq n+1} a_k \sin\, kx.$$

   (a) Montrer que pour tout $x \in]0,\, \pi]$ et $n \geq 1$, $|V_n(x)| \leq \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \leq \frac{\pi}{x}$.

(b) Pour $x \in]0, \pi[$, établir la relation

$$R_n(x) = \sum_{k \geq n+1} (a_k - a_{k+1}) V_k(x) - a_{n+1} V_n(x).$$

(c) On fixe $x \in]0,\, \pi]$ et on désigne par l l'entier ≥ 1 tel que $\frac{\pi}{l+1} < x \leq \frac{\pi}{l}$. Montrer que:

$$\text{si } n \geq l, \quad |R_n(x)| \leq \frac{2\pi a_{n+1}}{x} \leq 2\varepsilon_{n+1},$$

et que

$$\text{si } n < l, \quad \Big| \sum_{k=n+1}^{l} a_k \sin kx \Big| \leq x \sum_{k=n+1}^{l} k a_k \leq \pi \varepsilon_{n+1}.$$

(d) Etablir que, pour tout $x \in [0, \pi]$ et tout $n \geq 1$, on a

$$|R_n(x)| \leq (2 + \pi)\varepsilon_{n+1}.$$

Conclure que S converge uniformément sur $[0,\, \pi]$.

4. Un exemple. On pose $a_1 = 0$ et $a_n = 1/(n \log n)$.

   (a) Utiliser ce qui précède pour montrer la convergence uniforme sur $[0,\, \pi]$ de la série S.

   (b) Par comparaison avec la série $\sum_{n \geq 2} \frac{\sin^2 nx}{n \log n}$, montrer que S ne converge absolument pour aucun $x \in]0, \pi[$.