UFR Mathématiques
Université Rennes I

Préparation à l'agrégation
2013/2014

TD d'Analyse 2: Series entières, Séries de Fourier

Exercice 1

A) Trouver les rayons de convergence des séries entières $\sum a_n z^n$ pour

1. $a_n = n^{(-1)^n}$.
2. $a_n = \frac{1}{n}$, si n est premier; sinon $a_n = 0$.
3. $a_n = \frac{\sinh n}{n}$,
4. $a_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^{2n}} dt$.

B) Montrer que toute série entière qui converge uniformément sur le cercle unité converge uniformément sur le disque unité fermé.

C) Soit $f \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Pour $n \geq 1$, on pose

$$s_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x + \frac{k}{n}), \quad p.p.$$

Montrer que la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ converge dans L^2 vers la constante $\int_0^1 f(x)\, dx$.

D) Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et $r \in [0, R[$. On définit

$$I(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta.$$

Montrer que $r \mapsto I(r)$, définie sur $[0, R[$, est continue, croissante et convexe.

Exercice 3

On considère la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$.

1. Déterminer le rayon de convergence de cette série.
2. Montrer que si S désigne sa somme, on a

$$\forall z \in D = \{z,\, |z| < 1\}, \quad S(z) = H(z)$$

avec

$$H(z) = \frac{z}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1} e^{-t}}{1 - ze^{-t}}\, dt.$$

3. Montrer que H s'étend en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash[1,+\infty[$. On pourra montrer que H définit une fonction holomorphe sur l'ouvert $U_\varepsilon = \{z, \Re z < \frac{1}{\varepsilon}, |\Im z| > \varepsilon \text{ si } \Re z > 1-\varepsilon\}$ avec $\varepsilon > 0$.

4. Quels sont les point réguliers et les points singuliers de la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^\alpha}$.

Exercice 4

Soit α, $0 < \alpha < 1$, f une fonction 2π périodique vérifiant la condition:

$$\exists \eta \in \mathbb{R}, \quad \forall x,\, y \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(y)| \leq \eta |x-y|^\alpha.$$

On note $c_n(f)$ les coefficients de Fourier de f et on rappelle les notations:

$$S_N(f)(x) = \sum_{-N}^{N} c_n(f) e^{inx}, \quad N \geq 0,\, x \in \mathbb{R}, \quad \sigma_N(f) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} S_k(f),\, N \geq 1.$$

1. Soient K_N, $N \geq 1$ les noyaux de Féjer définis par

$$K_N(x) = \frac{1}{N}\Big(\frac{\sin \frac{Nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}\Big)^2.$$

   (a) Etablir que pour $x \in [-\pi, \pi]$,

$$K_N(x) \leq \frac{\pi^2}{N}\Big(\frac{\sin \frac{Nx}{2}}{x}\Big)^2 \leq \frac{\pi^2}{N}\inf(\frac{1}{x^2}, \frac{N^2}{4}).$$

   (b) En déduire l'existence d'une constante C telle que, pour tout $N \geq 1$,

$$||\sigma_N(f) - f||_\infty \leq \frac{C}{N^\alpha}.$$

2. Soient D_N, $N \geq 0$ les noyaux de Dirichlet définis par

$$D_N(x) = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin \frac{x}{2}}.$$

   Montrer qu'il existe une constante Δ telle que pour tout $N \geq 2$

$$||D_N||_1 \leq \int_0^{(N+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin y|}{y}\, dy \leq \Delta \ln N.$$

3. (a) Vérifier que $S_N(\sigma_N(f)) = \sigma_N(f)$ et établir l'inégalité

$$||f - S_N(f)||_\infty \leq ||f - \sigma_N(f)||_\infty (1 + ||D_N||_1).$$

(b) Conclure que $S_N(f)$ converge vers f uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5

Soit f une fonction mesurable 2π périodique sur $\mathbb{R}$.

1. On suppose que f est $\mathbb{R}-$analytique.

   (a) Soient c_n les coefficients de Fourier de f. Justifier les relations

   $$\sum_n |c_n| < +\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}.$$

   (b) Montrer qu'il existe $b > 0$ et F_0 holomorphe dans l'ouvert

   $$U_0 = \{z,\, -\pi - b < \Re z < \pi + b,\, -b < \Im z < b\}$$

   telle que pour tout $x \in U_0 \cap \mathbb{R}$, $F_0 = f$.

   (c) En déduire qu'il existe F holomorphe dans $B_b = \{z, \quad |\Im z| < b\}$, 2π-périodique, telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = f(x)$.

   (d) Montrer que pour tout β, $|\beta| < b$, et $n \in \mathbb{Z}$,

   $$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]} F(x + i\beta) e^{-in(x+i\beta)}\, dx.$$

   (e) En déduire l'existence d'une constante positive C telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

   $$|c_n| \leq C e^{-b|n|/2}.$$

2. Inversement, on suppose que les coefficients de Fourier de f vérifient l'inégalité ci-dessus.

   (a) Justifier que

   $$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}.$$

   (b) Montrer que f est $\mathbb{R}-$ analytique.