Université de Rennes 1, Préparation à l'Agrégation de Mathématiques 2013-2014

Problème d'Analyse 2 - Hors d'oeuvre

Exercice 1 *Sur la transformée de Fourier L^1.*

Partie I

Dans tout l'exercice, pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on note $\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f(x)\, dx$ sa transformée de Fourier. Dans un premier temps, on reprend un calcul classique.

Q1. Montrer que, pour tout $\lambda > 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x^2}\, dx = \sqrt{\pi/\lambda}$.

Q2. Montrer que, pour tout $\lambda > 0$ et $y \in \mathbb{R}$, l'application

$$g : y \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} exp(-\lambda(x+iy)^2)\, dx$$

est définie et dérivable. Calculer sa dérivée.

Q3. Soit, pour $\sigma \in \mathbb{R}^*$, $g_\sigma(x) = \exp(-x^2/\sigma^2)$. Déduire de ce qui précède que

$$\hat{g}_\sigma(\xi) = g_{2/\sigma}(\xi)\sqrt{\pi\sigma^2}.$$

Partie II

Dans cette partie et la suivante, on considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$h(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

Q1. Montrer que h est intégrable sur $[-1, 1]$.

Q2. Montrer que h n'est pas un élément de $L^1(\mathbb{R})$, mais que $\int_0^R h(x)\, dx$ admet une limite lorsque $R \to +\infty$.

Q3. On note $\hat{+}$ l'addition de contours, et $c^+(r)$ (resp. $c^-(r)$) le demi-cercle centré en 0 et de rayon r contenu dans le demi-plan complexe supérieur, $\{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$ (resp. inférieur, $\{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Im}(z) \leq 0\}$), parcouru dans le sens positif. En utilisant le contour $\mathcal{C} = [1/R, R] \hat{+} c^+(R) \hat{+} [-R, -1/R] \hat{+} c^-(1/R)$ (un dessin vous aidera grandement), montrer que la limite de la question précédente vaut $\pi/2$.

Partie III

Dans cette partie, on démontre que, si on a bien $\|\hat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$ pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on n'a pas l'inégalité inverse. On construit donc une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée dans $L^1(\mathbb{R})$ mais dont les transformées de Fourier tendent vers 0 dans $L^\infty(\mathbb{R})$.

Q1. Montrer que (f_n) ne peut être une suite de fonctions positives.

Q2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction définie par $f_n(x) = h(x)g_n(x)$ est un élément de $L^1(\mathbb{R})$, et que $\|f_n\|_{L^1} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Q3. Montrer que la suite $(\|\hat{f}_n\|_{L^\infty})_{n>0}$ est bornée. Conclure la partie.

Exercice 2 *Sur les inclusions entre espaces L^p.*

Partie I

Dans tout l'exercice, les fonctions sont à valeurs réelles. Dans un premier temps, on revient sur les relations d'inclusion bien connues.

Q1. (a) Montrer que, pour tout $1 \leq p < q \leq +\infty$, on a $\ell^p(\mathbb{N}) \hookrightarrow \ell^q(\mathbb{N})$ (*i.e.* que $\ell^p(\mathbb{N}) \subset \ell^q(\mathbb{N})$ et que l'injection induite est continue, en calculant la norme de cette injection).

Q1. (b) A l'aide d'un exemple, montrer que cette inclusion est stricte.

Q2. (a) Montrer que, pour tout $1 \leq p < q \leq +\infty$, on a $L^q(0,1) \hookrightarrow L^p(0,1)$.

Q2. (b) A l'aide d'un exemple, montrer que cette inclusion est stricte.

Q3. (a) Pour $p \neq q$ donnés, construire à l'aide des exemples précédents une fonction qui appartient à $L^p(\mathbb{R}^+)$ mais pas à $L^q(\mathbb{R}^+)$ (discuter selon les cas $p > q$ et $p < q$).

Q3. (b) Montrer que si $f \in L^p(\mathbb{R}^+) \cap L^q(\mathbb{R}^+)$ avec $p < q$, alors pour tout $r \in [p, q]$, $f \in L^r(\mathbb{R}^+)$, et que l'application $r \mapsto \|f\|_{L^r(\mathbb{R}^+)}$ est continue sur $[p, q]$.

Partie II

L'objectif de cette partie est de pousser plus loin l'absence d'inclusions entre espaces $L^p(\mathbb{R}^+)$. On démontre par l'exemple qu'il existe des fonctions qui appartiennent à $L^p(\mathbb{R}^+)$ pour un p donné, mais à aucun $L^q(\mathbb{R}^+)$, $q \neq p$. On montrera ensuite que, de même que $\bigcap_{p\in[1,\infty]} L^p(\mathbb{R}^+)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^+)$ (pourquoi ?), l'ensemble des fonctions appartenant "uniquement à $L^p(\mathbb{R}^+)$" est dense dans $L^p(\mathbb{R}^+)$.

Q0. Citer une fonction qui appartient à $L^\infty(\mathbb{R}^+)$ mais à aucun $L^p(\mathbb{R}^+)$ pour p fini.

Q1. (a) Montrer que la fonction ci-après est intégrable sur $]0, 1]$:

$$f(x) = \frac{1}{x(\ln(2/x))^2}.$$

Q1. (b) Montrer que $f \notin L^p(0,1)$ pour $p > 1$.

On a ainsi démontré les cas extrémaux de la propriété $(\mathcal{P}_p)$ suivante : pour tout $p \in [1, +\infty]$, il existe une fonction $f \in L^p(\mathbb{R}^+)$ telle que, pour tout $q \neq p$, $f \notin L^q(\mathbb{R}^+)$.

Q2. (a) Montrer que la fonction ci-après satisfait $(\mathcal{P}_1)$:

$$F_1(x) = \left\{ \begin{array}{ll} f(x) & \text{si } x \in (0,1) \\ \frac{1}{x\ln(2x)^2} & \text{si } x > 1 \end{array} \right. .$$

Q2. (b) En déduire que, pour $1 \leq p < +\infty$, $F_p(x) = F_1(x)^{1/p}$ satisfait $(\mathcal{P}_p)$.

Q3. (a) Montrer que si $g \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^+)$, alors $F_p + g$ satisfait $(\mathcal{P}_p)$.

Q3. (b) En déduire que pour tout p fini, l'ensemble des fonctions satisfaisant la propriété $(\mathcal{P}_p)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^+)$.