Préparation Agrégation de Mathématiques
Septembre 2014

TD Analyse: Feuille 2

Exercice 1

Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ muni de la norme

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 \, dx} \tag{1}$$

Soit T l'application définie sur E par:

$$\forall f \in E, \quad \forall x \in [0,1], \quad T(f)(x) = xf\left(\frac{x}{2}\right), \tag{2}$$

1. Montrer que T est une application linéaire continue de $E \to E$. Dans la suite, on note

$$\forall f \in E, \quad \|T\|_2 = \sup_{f\in E} \frac{\|T(f)\|_2}{\|f\|_2}. \tag{3}$$

2. Déterminer $\|T\|_2$. Pour cela, on pourra considérer la suite (f_n) telle que:

   (a) f_n est affine par morceaux.

   (b) $f_n(0) = f_n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) = f_n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n^2}\right) = f_n(1) = 0, \quad f_n\left(\frac{1}{2}\right) = 1.$

3. Que devient la quantité (3) lorque E est muni de la norme:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|? \tag{4}$$

Exercice 2

Pour tout $x \geq 0$ et pour tout $m \in \mathbb{R}$, on pose

$$T_m(x) = \int_0^{+\infty} t^m e^{-(t^2+x/t)} \, dt, \quad (\text{rappel:} \quad T_0(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}) \tag{5}$$

1. (a) Montrer que $T_m(x)$ est bien défini pour tout $x > 0$ et pour tout $m \in \mathbb{R}$.
   (b) Montrer que l'application $m \mapsto T_m(0)$ est bien définie sur un intervalle A de $\mathbb{R}$.
   (c) Calculer $T_m(0)$ lorque $m \in \mathbb{N}$. On pourra distinguer suivant la parité de m.

2. (a) Montrer que T_m est continue sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $m \in A$.
   (b) Montrer que T_m est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ pour tout $m \in \mathbb{R}$.
   (c) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall m \in \mathbb{R}, \quad T_m(x) \geq e^{-1} \int_0^1 t^m e^{-x/t}\, dt. \tag{6}$$

   (d) En déduire la valeur de $\lim_{x \to 0^+} T_m(x)$ lorsque $m \notin A$ en utilisant le changement de variable $w = x/t$.

3. (a) Soit $m \in \mathbb{R}$. Montrer que T_m est de classe $\mathbb{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer T'_m en fonction de T_{m-1}.
   (b) Soit $m \in \mathbb{R}$. Etudier la régularité de la fonction T_m sur $\mathbb{R}_+^*$ ainsi que ses variations de T_m sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (c) Etudier la convexité de T_m sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (d) Etudier en fonction de m la dérivabilité à droite de T_m en 0.

4. (a) Etudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} u^n e^{-u}\, du$ lorsque $n \in \mathbb{N}$. Calculer cette intégrale quand elle existe.
   (b) Montrer que

$$\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad T_{-m}(1) \leq (m-2)! \tag{7}$$

   On pourra effectuer le changement de variable $t = 1/u$.
   (c) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que le rayon de convergence de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n!} T_{k-n}(1) x^n$ est ≥ 1.
   (d) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad T_k(1+x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} T_{k-n}(1) x^n. \tag{8}$$