Préparation Agrégation de Mathématiques
Novembre 2014

TD Analyse: Feuille 4

Exercice 1

1. Soit $T > 0$ et soit f une fonction périodique de période T, de carré intégrable sur $[0, T]$. On définit:

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad f_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(x)\, e^{-2ik\pi x/T}\, dx.$$

Montrer que f est la limite dans $L^2(0, T)$ de la suite de fonctions de terme général:

$$S_N(f):\ x \mapsto \sum_{k=-N}^{N} f_k e^{2ik\pi x/T}.$$

et que

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(x)|^2\, dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |f_k|^2.$$

2. Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. On définit la transformée de Fourier de f par

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ix\xi}\, dx, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. On note f_a l'application $f_a:\ x \mapsto f(ax)$. Montrer que

$$\hat{f}_a(\xi) = \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2

1. Soit $h \in L^1(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que $h = 0$ en dehors de $[-M, M]$. Montrer que $\hat{h}$ est développable en série entière avec un rayon de convergence infini.

2. Montrer que la fonction H définie par
$$H(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h(x-k)$$
est périodique de période 1 et intégrable sur $[0,1]$.

3. Montrer que
$$\int_0^1 H(x)e^{-2ik\pi x}\,dx = \hat{h}(2k\pi), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

4. Montrer que si h est de classe $\mathcal{C}^2$ alors $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{h}(2k\pi)| < +\infty$ et
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} h(x-k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{h}(2k\pi)e^{2ik\pi x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

5. Montrer que: $\forall j \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$,
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} (-i)^j (x-k)^j h(x-k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{d^j\hat{h}}{d\xi^j}(2k\pi)e^{2ik\pi x}.$$

6. On suppose que h est de classe $\mathcal{C}^2$ et $\hat{h}(0) = 1$. Soit $N \in \mathbb{N}$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes:

   (a) $\forall j \in \{0,\cdots,N\}$, il existe un polynôme Q_{j-1} de degré $\leq j-1$ tel que:
   $$x^j = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (k^j + Q_{j-1}(k))h(x-k), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

   (b) $\forall j \in \{0,\cdots,N\}$, il existe un polynôme R_{j-1} de degré $\leq j-1$ tel que
   $$\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^j h(x-k) = x^j + R_{j-1}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

   (c) $\forall j \in \{0,\cdots,N\}$, $\forall k \in \mathbb{Z}^*$, on a: $\dfrac{d^j\hat{h}}{d\xi^j}(2k\pi) = 0$.

7. Montrer qu'il n'existe pas de fonction h de classe $\mathcal{C}^2$ à support compact vérifiant $\hat{h}(0) = 1$ et telle que $\forall j \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme Q_{j-1} de degré $\leq j-1$ tel que:
$$x^j = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (k^j + Q_{j-1}(k))h(x-k), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3

Soit $h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, $h \not\equiv 0$, telle que $h = 0$ en dehors d'un intervalle borné $[-M, M]$ où $M \in \mathbb{N}^*$. On note V le sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{R})$ engendré par les fonctions $h(\cdot - k)$, $k \in \mathbb{Z}$, et P la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{R})$ sur V.

1. Montrer que $\forall (\lambda_{-N}, \lambda_{-N+1}, \cdots, \lambda_N) \in \mathbb{C}^{2N+1}$,
$$|\sum_{|k|\leq N} \lambda_k h(x-k)|^2 \leq 2M \sum_{|k|\leq N} |\lambda_k|^2 |h(x-k)|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. En déduire que
$$\int_{\mathbb{R}} |\sum_{|k|\leq N} \lambda_k h(x-k)|^2 \, dx \leq 2M \sum_{|k|\leq N} \|h\|_2^2 |\lambda_k|^2.$$

3. Soit $m \in L^2(-\pi, \pi)$, 2π-périodique et soit $g = m\hat{h}$. Montrer qu'il existe $f \in V$ tel que $g = \hat{f}$. *Indication:* développer m en série de Fourier $m(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} m_k e^{-ik\xi}$.

4. Soit μ une fonction mesurable 2π-périodique telle que $\gamma := \mu\hat{h} \in L^2(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $f \in V$ tel que $\gamma = \hat{f}$. *Indication:* considérer $m_N(\xi) = \mu(\xi)$ si $|\mu(\xi)| \leq N$ et $m_N(\xi) = 0$ sinon.

5. Montrer que $\hat{h}$ s'annule un nombre fini de fois dans $[-\pi, \pi]$. En déduire que, pour tout $\xi \in [-\pi, \pi]$ en dehors d'un ensemble au plus fini de points:
$$0 < \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{h}(\xi + 2k\pi)|^2 < +\infty.$$

6. Montrer que si $f \in L^2(\mathbb{R})$, on peut définir:
$$Lf(\xi) = \frac{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\xi+2k\pi)\overline{\hat{h}}(\xi+2k\pi)}{\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{h}(\xi+2k\pi)|^2} \hat{h}(\xi), \quad \text{p.p. dans } \mathbb{R}.$$
et que la fonction Lf ainsi définie est la transformée de Fourier d'un élément de V.

7. Montrer que $\widehat{Pf} = Lf$.