Préparation Agrégation de Mathématiques
Décembre 2014

TD Analyse: Feuille 5

Exercice 1

1. Soit $\lambda > 0$. Pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $a > 0$, on pose
$$I_{u,v}(a) = \iint_{\Delta_a} \frac{e^{i(ux+vy)}\sin(\lambda x)\sin(\lambda y)}{xy}\,dxdy \quad \text{où} \quad \Delta_a = [-a,a]^2.$$
Montrer que: $\lim\limits_{a\to+\infty} I_{u,v}(a) = \begin{cases} \pi^2 & \text{si } (u,v) \in \mathring{\Delta}_\lambda \\ 0 & \text{si } (u,v) \notin \Delta_\lambda \end{cases}$ et que la convergence est uniforme en (u,v) sur $\mathring{\Delta}_\lambda$ et $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta_\lambda$.

2. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$. On pose
$$\hat{f}(x,y) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(u,v)e^{i(ux+vy)}\,dudv.$$
Montrer que
$$\lim_{a\to+\infty} \iint_{\Delta_a} \hat{f}(x,y)\frac{\sin(\lambda x)\sin(\lambda y)}{xy}\,dxdy = \pi^2 \iint_{\Delta_\lambda} f(u,v)\,dudv.$$
sachant que
$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

3. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ continue et bornée sur $\mathbb{R}^2$ telle que $\hat{f} = 0$.
   (a) Montrer que $f(0,0) = 0$.
   (b) Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on note $f_{a,b}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par
   $$f_{a,b}(x,y) = f(x+a, y+b), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$
   Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que: $\hat{f}_{a,b} = 0$. En déduire que $f(a,b) = 0$.

4. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$.
   (a) Montrer que
   $$\lim_{(a,b)\to(0,0)} \|f_{a,b} - f\|_1 = 0.$$
   On pourra commencer par le cas où f est continue à support compact.
   (b) Montrer que si $f \star g = 0$ pour toute fonction $g \in L^1(\mathbb{R}^2)$ continue et bornée sur $\mathbb{R}^2$, alors $f = 0$ p.p.
   (c) En déduire que si $\hat{f} = 0$, alors $f = 0$ p.p.

Exercice 2

Partie A

1. (a) Soit $a = (a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ une suite de nombres complexes. Montrer que pour toute partie finie J de $\mathbb{Z}^2$:
   $$\sum_{(m,n)\in J} |a_{m,n}|^2 \leq (\sum_{(m,n)\in J} |a_{m,n}|)^2$$
   (b) On pose
   $$\ell^1(\mathbb{Z}^2) = \{a = (a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}, \quad \|a\|_1 := \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} |a_{m,n}| < +\infty\}$$
   $$\ell^2(\mathbb{Z}^2) = \{a = (a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}, \quad \|a\|_2 := \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} |a_{m,n}|^2 < +\infty\}$$
   Montrer que $\ell^1(\mathbb{Z}^2) \subset \ell^2(\mathbb{Z}^2)$.
2. Pour tout $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$, on note $w^{m,n}$ la suite complexe définie par
   $$w^{m,n}_{p,q} = \delta_{mp}\delta_{nq}, \quad \forall (p, q) \in \mathbb{Z}^2.$$
   Montrer qu'il existe une unique forme linéaire continue $\sigma : \ \ell^1(\mathbb{Z}^2) \to \mathbb{C}$ telle que
   $$\sigma(w^{m,n}) = 1, \quad \forall (m, n) \in \mathbb{Z}^2.$$

3. Soit $a = (a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} \in \ell^2(\mathbb{Z}^2)$, $b = (b_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} \in \ell^2(\mathbb{Z}^2)$.

   (a) On pose
   $$\mathbb{U} = \{\zeta \in \mathbb{C}, \quad |z| = 1\}$$
   et on fixe $\zeta \in \mathbb{U}$. Montrer que
   $$(\zeta^{q(m-p)} a_{p,q} b_{m-p,n-q})_{(p,q)\in\mathbb{Z}^2} \in \ell^1(\mathbb{Z}^2).$$

   (b) On pose
   $$c_{m,n} = \sum_{(p,q)\in\mathbb{Z}^2} \zeta^{q(m-p)} a_{p,q} b_{m-p,n-q}, \quad \forall (m,n) \in \mathbb{Z}^2.$$
   Montrer que
   $$|c_{m,n}| \leq \|a\|_2 \|b\|_2, \quad \forall (m,n) \in \mathbb{Z}^2.$$

   (c) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$ tel que
   $$\forall (m,n) \in \mathbb{Z}^2, \quad |m| + |n| \geq A \Rightarrow |c_{m,n}| < \varepsilon.$$
   On commencera par considérer le cas où a et b sont à support fini, c'est-à-dire nulles à partir d'un certain rang. Dans la suite, on note $c = a \star b$.

   (d) Montrer que
   $$\forall (a,b) \in \ell^1(\mathbb{Z}^2), \quad \|a \star b\|_1 \leq \|a\|_1 \|b\|_1.$$

4. On pose $u = w^{(1,0)}, \quad v = w^{(0,1)}$. Montrer que
   $$w^{(m,n)} = u^n \star v^m, \quad \forall (m,n) \in \mathbb{Z}^2.$$

Partie B

On note $\mathcal{B}$ l'ensemble des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, périodiques de période 1 muni de la norme
$$f \in \mathcal{B} \mapsto N(f) = \sup_{t\in\mathbb{R}} (|f(t)| + |f'(t)|).$$

On note z l'application: $t \mapsto e^{2i\pi t}$.

1. Montrer que
$$\forall (f,g) \in \mathcal{B}^2, \quad N(fg) \leq N(f)N(g).$$

2. Montrer que le sous-espace de $\mathcal{B}$ engendré par la suite $(z^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est dense dans $\mathcal{B}$.

3. Pour tout $f \in \mathcal{B}$, on note $\psi(f)$ la suite de terme général:
$$\psi(f)_{m,n} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq 0, \\ \displaystyle\int_0^1 f(t)e^{-2i\pi mt}\, dt & \text{si} \quad n = 0 \end{cases}$$
Montrer qu'on définit ainsi une application continue de $\mathcal{B}$ dans $\ell^1(\mathbb{Z}^2)$.

4. Montrer que
$$\forall (f,g) \in \mathcal{B}^2, \quad \psi(fg) = \psi(f) \star \psi(g).$$

5. Montrer que $\psi(z) = u$.

6. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $e^{2i\pi\theta} = \zeta$. Montrer que
$$\forall f \in \mathcal{B}, \quad v \star \psi(f) = \psi(f(\cdot + \theta)) \star v.$$

Exercice 3

1. Montrer que les intégrales suivantes sont convergentes:
$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x}\, dx, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx$$

2. Soit $(a,b) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[$. Montrer que
$$I_{a,b} = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x}\, dx = \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

3. (a) Montrer que
$$\int_0^{+\infty} e^{-tx}\frac{\sin(t)}{t}\, dt = \frac{\pi}{2} - \arctan(x), \quad \forall x > 0.$$
   (b) En déduire que
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$$