Université de Rennes 1
Jürgen Angst

Préparation à l'agrégation
année 2014-2015

Quelques éléments de géométrie différentielle pour l'agrégation

L'objectif de ces notes est de revenir rapidement sur les notions de base de calcul/géométrie différentiel(le) exigibles au programme de l'agrégation et d'en donner quelques illustrations plus ou moins classiques.

Le programme o ciel :

Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$. Définitions équivalentes : graphe local, paramétrisation locale, équation locale. Espace tangent. Notions métriques : longueur d'un arc, paramétrisation normale, courbure d'un arc en dimensions 2 et 3. Gradient. Tracé de courbes usuelles. Surfaces dans $\mathbb{R}^3$: position par rapport au plan tangent. Définition de la divergence d'un champ de vecteurs. Extrema locaux d'une fonction définie sur une sous-variété (extrema liés), multplicateurs de Lagrange.

Commentaires issus du rapport du jury 2014 :

Sur la géométrie en général :
Les leçons de géométrie sont souvent délaissées alors que les candidats seront amenés à enseigner la géométrie. Notons de plus que les illustrations des notions alébriques des leçons par des exemples et des applications issus de la géométrie sont les bienvenus, ceci tout particulièrement en théorie des groupe. À ce propos, rappelons qu'un dessin au tableau est souvent apprécié et soulignons que le jury n'est pas vraiment regardant sur les qualités esthétiques du dessin.

Sur l'exponentielle de matrice :
Les notions d'algèbres de Lie ne sont pas au programme de l'agrégation, on conseille de n'aborder ces sujets qu'à condition d'avoir une certaine solidité. Sans aller si loin, on pourra donner une application de l'exponentielle (de matrice) à la décomposition polaire de certains sous-groupes fermés de $GL_n(\mathbb{R})$ (groupes orthogonaux par exemple).

Sur les formes quadratiques :
La preuve de la loi d'inertie de Silvester doit être connue ainsi que l'orthogonalisation simultanée. Le candidat doit avoir compris la signication géométrique de ces deux entiers composant la signature d'une forme quadratique réelle ainsi que leur caractère classifiant. La différentielle seconde d'une fonction de plusieurs variables est une forme quadratique importante.

Sur les théorèmes d'inversion locale et des fonctions implicites :
Il s'agit d'une belle leçon qui exige une bonne maîtrise du calcul différentiel. Même si le candidat ne propose pas ces thèmes en développement, on est en droit d'attendre de lui des idées de démonstration de ces deux théorèmes fondamentaux. On attend des applications en géométrie différentielle (notamment dans la formulation des multiplicateurs de Lagrange). Rappelons que les sous-variétés sont au programme

Sur les applications différentiables entre espaces euclidiens :
Cette leçon requiert une bonne matrise de la notion de différentielle première et de son lien avec les dérivées partielles. Le théorème de différentiation composée doit être connu et pouvoir être appliqué dans des cas simples comme le calcul de la différentielle de l'application $x \mapsto ||x||^2$ pour

la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. La notion de différentielle seconde est attendue au moins pour les fonctions de classe C^2 ainsi que les applications classiques quant à l'existence d'extrema locaux.

Sur les sous-variétés de l'espace euclidien :
Cette leçon n'a pas eu beaucoup de succès, c'est bien dommage. Elle ne saurait être réduite à un cours de géométrie différentielle abstraite ; ce serait un contresens. Le jury attend une leçon concrète, montrant une compréhension géométrique locale. Aucune notion globale n'est exigible, ni de notion de variété abstraite. Le candidat doit pouvoir être capable de donner plusieurs représentations locales (paramétriques, équations, etc.) et d'illustrer la notion d'espace tangent sur des exemples classiques. Le jury invite les candidats à réfléchir à la pertinence de l'introduction de la notion de sous-variétés. Le théorème des extremas liés devient assez transparent lorsqu'on le traite par les sous-variétés. Les groupes classiques donnent des exemples utiles de sous-variétés.

Sur les extrema :
Il faut bien faire la distinction entre propriétés locales (caractérisation d'un extremum) et globales (existence par compacité, par exemple) [...] les problèmes de minimisation sous contrainte amènent à faire le lien avec les extrema liés, la notion de multiplicateur de Lagrange [...].

Les leçons où l'on peut/doit parler de géométrie différentielle :

— 106 - Groupe linéaire d'un e.v. de dimension finie E, sous-groupes de $GL(E)$. Applications.
— 150 - Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.
— 151 - Dimension d'un e.v.. Rang. Exemples et applications.
— 152 - Déterminant. Exemples et applications.
— 156 - Exponentielle de matrices. Applications.
— 158- Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.
— 159 - Formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications.
— 170 - Formes quad. sur un e.v. de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.
— 171 - Formes quadratiques réelles. Exemples et applications.
— 183 - Utilisation des groupes en géométrie.
— 214 - Théorèmes d'inversion locale, des fonctions implicites. Exemples et applications.
— 215 - Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.
— 216 - Étude métrique des courbes. Exemples.
— 217 - Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$. Exemples.
— 219 - Problèmes d'extremums.

Références très recommandables en lien avec la géométrie différentielle

[BG87] Marcel Berger and Bernard Gostiaux. *Géométrie différentielle : variétés, courbes, surfaces.* PUF, 1987.

[Laf96] Jacques Lafontaine. *Introduction aux variétés différentiables.* EDP Sciences, 1996.

[Pos90] Mikhail Postnikov. *Leçons de géométrie, Variétés différentiables.* Mir, 1990.

[Rou03] François Rouvière. *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation.* Cassini, 2003.