

SOUS-VARIÉTÉS DE L'ESPACE EUCLIDIEN

Nous revenons dans cette deuxième partie sur les notions de sous-variété de l'espace euclidien, d'espace tangent, ainsi que sur les notions de points critiques et d'extrema sur les sous-variétés. Parmi les nombreux exemples de sous-variétés euclidiennes, les sous-groupes classiques de matrices et les résultats associés sont particulièrement appréciés et permettent d'illustrer à la fois les leçons d'analyse/algèbre/géométrie.

1 Sous-variétés de l'espace euclidien

Commençons par rappeler la définition d'une sous-variété euclidienne et ses différentes caractérisations (graphe, implicite, paramétrée). De très bonnes références pour cette partie sont [BG87] p. 56 à 59 ou encore [Laf96], section D, p. 28 à 34.

1.1 Définitions équivalentes des sous-variétés

Définition 1. On dit qu'un ensemble $M \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété de \mathbb{R}^n de dimension d si pour tout point x de M , il existe

- des voisinages U et V de x et 0 dans \mathbb{R}^n ;
- un difféomorphisme $f : U \rightarrow V$;

tels que

$$f(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^d \times \{0_{\mathbb{R}^{n-d}}\}).$$

On dit alors que M est de codimension $n - d$ dans \mathbb{R}^n .

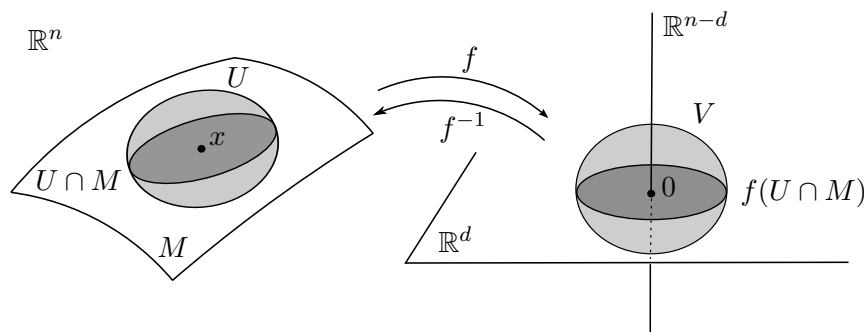


Figure 1 – Sous-variété de l'espace euclidien.

Autrement dit, localement l'ensemble M peut "s'identifier" à un ouvert de \mathbb{R}^d . Les différentes caractérisations ci-dessous peuvent être considérées comme autant de définitions alternatives de la notion de sous-variété euclidienne.

Théorème 1. Soit M un sous ensemble de \mathbb{R}^n . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. **Définition.** M est une sous-variété de \mathbb{R}^n de dimension d .
2. **Description implicite.** Pour tout point de x de M , il existe
 - un voisinage U de x dans \mathbb{R}^n ;
 - une submersion $g : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$;
 tels que

$$U \cap M = g^{-1}(0).$$

3. **Paramétrage.** Pour tout $x \in M$, il existe
 - un voisinage U de x dans \mathbb{R}^n ;
 - un voisinage Ω de 0 dans \mathbb{R}^d ;
 - une application $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$;
 tels que h est à la fois une immersion dans \mathbb{R}^n et un homéomorphisme de Ω sur $U \cap M$.
4. **Graphe.** Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in M$, il existe
 - un voisinage U de x dans \mathbb{R}^n ;
 - un voisinage V de (x_1, \dots, x_d) dans \mathbb{R}^d ;
 - $(n - d)$ fonctions $g_i : V \rightarrow \mathbb{R}$;
 tels que, à permutation éventuelle des coordonnées x_i ,

$$x \in U \cap M \iff \begin{cases} (x_1, \dots, x_d) \in V, \\ x_{d+1} = g_1(x_1, \dots, x_d), \\ \vdots \\ x_n = g_{n-d}(x_1, \dots, x_d). \end{cases}$$

Démonstration. On désigne par i l'injection canonique de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R}^n .

1 \Rightarrow 3. Soit f le difféomorphisme défini sur un voisinage U de $x \in M$ dont le point 1) affirme l'existence. Alors $\Omega = f(U \cap M) \cap \mathbb{R}^d$ est un ouvert de \mathbb{R}^d et $h = f^{-1} \circ i$ est à la fois une immersion dans \mathbb{R}^n et un homéomorphisme de Ω sur $U \cap M$.

1 \Rightarrow 2. Notons $f = (f^1, \dots, f^n)$ les composantes de f . Comme f est un difféomorphisme de U sur son image, les différentielles $D_x f_i$ sont linéairement indépendantes en tout point de $x \in U$. Posons alors $g = (f^{d+1}, \dots, f^n)$. On a bien une submersion de U dans \mathbb{R}^{n-d} telle que $M \cap U = g^{-1}(0)$.

3 \Rightarrow 1. Supposons que le point 3) est vérifié. Quitte à restreindre Ω , il existe un alors diffeomorphisme φ d'un ouvert U de \mathbb{R}^n contenant $x = h(0)$ tel que

$$\varphi \circ h(x^1, \dots, x^d) = (x^1, \dots, x^d, 0, \dots, 0).$$

On a alors

$$\varphi(U \cap M) = \varphi(h(\Omega)) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\}).$$

2 \Rightarrow 1. Si g est une submersion, quitte à restreindre U , il existe un difféomorphisme $\psi : U \rightarrow \psi(U)$

$$g \circ \psi(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^{n-d}).$$

On conclut alors comme plus haut.

2 \Leftrightarrow 4. Si M est localement le graphe de $G = (G^1, \dots, G^{n-d}) : V \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$, alors l'application

$$g : x \mapsto (x^{i+d} - G^i(x^1, \dots, x^d))_{1 \leq i \leq n-d}$$

est une submersion lícite quitte à restreindre son ouvert de définition. Réciproquement, si on dispose d'une telle submersion, quitte à permuter les coordonnées, on peut supposer que la matrice $(\partial_{i+d}g^j(x))_{1 \leq i, j \leq n-d}$ est inversible. D'après le théorème d'inversion locale appliqué à

$$F : x \mapsto (x^1, \dots, x^d, g^1(x), \dots, g^{n-d}(x)).$$

Son inverse local est de la forme

$$F^{-1} : x \mapsto (x^1, \dots, x^d, \gamma^1(x), \dots, \gamma^{n-d}(x)),$$

ce qui fait apparaître M comme le graphe de

$$G : (x^1, \dots, x^d) \mapsto \left(\gamma^j(x^1, \dots, x^d, 0, \dots, 0) \right)_{1 \leq j \leq n-d}.$$

□

1.2 Premiers exemples et contre-exemples

Sous forme d'exercices, voici quelques premiers (contre-)exemples de sous-variétés euclidiennes. On en trouvera de nombreux autres dans [Rou03] ou [BG87] par exemple.

Exercice 1 ([BG87], exemple 2.1.6.1 p. 59). *Démontrer de plusieurs façons que si $V \subset \mathbb{R}^n$ et $W \subset \mathbb{R}^m$ sont des sous-variétés, alors $V \times W$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$.*

Exercice 2 ([BG87], exemple 2.1.6.2 p. 60). *Montrer que la sphère unité de l'espace euclidien $\mathbb{S}^d := \{x = (x_1, \dots, x_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1}, x_1^2 + \dots + x_{d+1}^2 = 1\}$ est une sous-variété compacte de \mathbb{R}^{d+1} de dimension d .*

Exercice 3 ([Laf96], variante autour de l'exemple p.33). *Soit l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $f(t) := (t^2, t^3)$. L'image de f est-elle une sous-variété? Même question pour l'application $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $g(t) := (t, t^2, t^3)$.*

Exercice 4 ([Laf96], contre-exemple p. 32). *Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ l'application*

$$g : t \mapsto (\cos(t), \sin(t), \cos(\alpha t), \sin(\alpha t))$$

paramètre-t-elle sous-variété de \mathbb{R}^4 ?

Exercice 5 ([BG87], exercice 2.8.9 p. 109). *Soit H une hyperquadrique de \mathbb{R}^d d'équation*

$$\sum_{1 \leq i < j \leq d} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^d b_i x_i = 1,$$

où (a_{ij}) est une matrice symétrique inversible. Montrer que H est une sous-variété de \mathbb{R}^d de dimension $d-1$, difféomorphe à $\mathbb{S}^k \times \mathbb{R}^{d-1-k}$, l'entier $d-k$ étant le nombre de carrés négatifs de la forme quadratique associée à la matrice (a_{ij}) .

Exercice 6 (Grassmannienne, [Pos90] exercice 1 p. 161). *Montrer que l'ensemble $G(m, n)$ des sous-espaces vectoriels de dimension m dans \mathbb{R}^n est une sous-variété de dimension $m(n-m)$.*

1.3 Sous-groupes de matrices

Les sous-groupes de matrices classiques sont abordés comme exemples de sous-variétés euclidiennes dans de nombreux ouvrages. Ces exemples et les résultats associés permettent d'illustrer de nombreuses leçons en algèbre/analyse/géométrie. Vous pourrez par exemple consulter les exercices 94 et 95 p. 275–278 de [Rou03], les exercices 2.8.10–11 p. 110 de [BG87], l'excellente leçon 11 de [Pos90] ou encore la section 3.4 p. 64–71 de la référence classique [MT86].

Exercice 7 (Sous-groupes de matrices).

1. Montrer que $SL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ réelles de déterminant 1 est une sous-variété de \mathbb{R}^{n^2} . Quelle est sa (co)dimension ?
2. Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales $n \times n$ est une sous-variété de \mathbb{R}^{n^2} . Quelle est sa (co)dimension ?
3. Montrer que le sous ensemble V_r de $M_n(\mathbb{R})$ formé des matrices de rang $0 < r < n$ est une sous-variété de dimension $n^2 - (n - r)^2$.

Indication : soit U le sous-ensemble de $M_n(\mathbb{R})$ formé des matrices dont le premier mineur de taille $r \times r$ (en haut à gauche) est non nul. Montrer que si $X \in M_n(\mathbb{R})$ s'écrit

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

avec $A \in M_r(\mathbb{R})$ et $D \in M_{n-r}(\mathbb{R})$, alors X appartient à $V_r \cap U$ si et seulement si A est inversible et $D = CA^{-1}B$.

Le théorème suivant caractérise les morphismes continus de la droite réelle dans le groupe des matrices inversibles.

Théorème 2 ([Laf96] p. 37). *Si f est un homomorphisme continu du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ dans $GL_n(\mathbb{R})$, alors il existe un unique endomorphisme A tel que $f(t) = e^{tA}$.*

Remarque 1. *Réciproquement, si A est un endomorphisme, alors $f(t) = e^{tA}$ est bien un homomorphisme continu de $(\mathbb{R}, +)$ dans $GL_n(\mathbb{R})$.*

Démonstration. On écarte le cas trivial où f est constant et où $A = 0$ convient. Soit U une boule ouverte centrée en $0_{M_n(\mathbb{R})}$ dans $M_n(\mathbb{R})$ telle que l'exponentielle soit un difféomorphisme de $2U$ sur son image. D'après la continuité du morphisme f , il existe alors un intervalle ouvert non vide I contenant $0_{\mathbb{R}}$ tel que $f(I) \subset \exp(U)$. Aussi, il existe $c \in I \setminus \{0_{\mathbb{R}}\}$ et $A \in \exp(U) \setminus \{Id\}$ tels que $f(c) = A$. D'après le choix de U , il existe alors $B \in U$ tel que $A = \exp(B)$. On a alors nécessairement $\exp(B/2) = f(c/2)$ et plus généralement pour tous les entiers k, p :

$$\exp\left(\frac{kB}{2^p}\right) = f\left(\frac{kc}{2^p}\right).$$

En utilisant à nouveau la continuité de f , on en déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\exp(tB) = f(tc).$$

□

La proposition suivante montre que les sous-groupes classiques des matrices, dont on a vu qu'ils sont des exemples de sous-variété euclidienne, sont en fait paramétrés via l'application exponentielle.

Proposition 1 (Paramétrisation exponentielle des groupes classiques, [Laf96] p. 38).

1. Il existe un voisinage U de zéro dans l'ensemble des matrices de trace nulle tel que l'application l'exponentielle restreinte à U soit une paramétrisation de $SL_n(\mathbb{R})$.
2. Il existe un voisinage V de zéro dans l'ensemble des matrices antisymétriques tel que l'application l'exponentielle restreinte à V soit une paramétrisation de $O_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. Dans le premier cas, on considère un ouvert \mathcal{O} contenant $0_{M_n(\mathbb{R})}$ dans $M_n(\mathbb{R})$, symétrique par rapport à l'origine, et tel que l'exponentielle soit un difféomorphisme de \mathcal{O} sur son image. Si $B \in \exp(\mathcal{O}) \cap SL_n(\mathbb{R})$, il existe une unique matrice A tel que $B = \exp(A)$ et l'on a $1 = \det B = \det e^A = e^{\text{tr} A}$ i.e. $\text{tr} A = 0$. Il suffit donc de prendre pour U l'intersection de \mathcal{O} avec l'ensemble des matrices de trace nulle. De le second cas, on peut supposer de plus que \mathcal{O} est stable par transposition, auquel cas les relations

$$B^{-1} = \exp(-A), \quad {}^t B = \exp({}^t A)$$

imposent que $-A = {}^t A$ et il suffit alors de prendre pour V l'intersection de \mathcal{O} avec l'ensemble des matrices antisymétriques. \square

Plus généralement, si G est un sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$, on introduit l'ensemble

$$\mathfrak{g} := \{X \in M_n(\mathbb{R}), \exp(tX) \in G, \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

L'ensemble \mathfrak{g} n'est autre que l'algèbre de Lie de G , mais rappelons que cette notion n'est pas exigible à l'agrégation. On a alors le résultat suivant :

Théorème 3 ([MT86], théorème 3.4.3 p. 66). *Soit G est un sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$, alors il existe un voisinage U de zéro dans \mathfrak{g} et un voisinage V de l'identité dans G , tels que l'exponentielle réalise un homéomorphisme de U dans V .*

Ce résultat est le point clef dans la démonstration du théorème de (Cartan)–Von Neumann :

Théorème 4 (de Von Neumann, [MT86] p. 68). *Tout sous-groupe fermé non discret de $GL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété.*

2 Espace tangent à une sous-variété

On revient à présent sur la notion d'espace tangent à une sous-variété euclidienne, notion importante grâce à laquelle certains énoncés se formulent / démontrent de façon limpide (le théorème des extrema liés par exemple).

2.1 Définition et exemples

Définition 2. *On dit qu'un vecteur v est tangent en un point x_0 d'une partie A de \mathbb{R}^n s'il existe une application différentiable γ d'un ouvert $] -\varepsilon, \varepsilon[$ de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^n telle que $\gamma(] -\varepsilon, \varepsilon[) \subset A$, $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma'(0) = v$.*

Proposition 2 (Espace tangent à une sous-variété). *L'ensemble des vecteurs tangents en un point x_0 d'une sous-variété M de dimension d de l'espace euclidien \mathbb{R}^n est un \mathbb{R} –espace vectoriel de dimension d .*

Démonstration. Soit $x_0 \in M$ une sous-variété euclidienne de dimension d de \mathbb{R}^n . Par définition, il existe un voisinage U de x_0 dans \mathbb{R}^n et un difféomorphisme $f : U \rightarrow f(U)$ tel que

$$f(U \cap M) = f(U) \cap \left(\mathbb{R}^d \times \{0_{\mathbb{R}^{n-d}}\} \right).$$

Quitte à translater, on peut supposer que $f(x_0) = 0$. Alors, si v est un vecteur tangent à M en x_0 associé à une courbe γ , i.e. $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma'(0) = v$, on a alors $D_{x_0}f.v \in \mathbb{R}^d \times \{0\}$. Inversement, si $w \in \mathbb{R}^d \times \{0\}$, en choisissant $\varepsilon > 0$ assez petit de sorte que $tw \in f(U)$ pour $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, on voit que la courbe $t \mapsto f^{-1}(tw)$ définit un vecteur tangent à M au point x_0 , à savoir le vecteur $D_0f^{-1}w$. Autrement dit, l'ensemble des vecteurs tangents en x_0 s'identifie à l'image par l'application linéaire D_0f^{-1} de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^d \times \{0\}$, d'où le résultat. \square

Définition 3. On note $T_{x_0}M$ et on appelle espace tangent en x_0 à M l'espace affine correspondant, i.e. l'ensemble des point $x \in \mathbb{R}^n$ tels que le vecteur $(x - x_0)$ est tangent à M en x_0 .

Proposition 3 (Théorème 2.5.7 p. 86 de [BG87], [Laf96] p. 34). Selon les définitions équivalentes de sous-variétés données ci-dessus, les espaces tangents en x_0 sont donnés par

Formulation implicite. Si $U \cap M = g^{-1}(0)$ où g est une submersion de U dans \mathbb{R}^{n-p} , alors

$$T_{x_0}M = \text{Ker}(D_{x_0}g).$$

Paramétrage. Si $h : \Omega \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une immersion et un homéomorphisme d'un voisinage de 0 sur $U \cap M$ tel que $h(0) = x_0$ alors

$$T_{x_0}M = \text{Im}(D_0h).$$

Grphe. Si $M = (V, G(V))$ avec $V \subset \mathbb{R}^d$ et $G = (g_1, \dots, g_{n-d})$ alors

$$T_{x_0}M = \bigcap_{i=1}^{n-d} \text{Ker}(D_{x_0}(g_i - \text{Id})).$$

Démonstration.

Formulation implicite. Pour toute courbe γ tracée sur M définissant un vecteur tangent v en x_0 , on a $g(\gamma(t)) = g(x_0) = 0$ et donc $D_{x_0}g.v = 0$, ainsi $T_{x_0}M \subset \text{Ker}(D_{x_0}g)$ et il y a en fait égalité comme les deux espaces ont même dimension.

Paramétrage. Soit $v \in \mathbb{R}^d$ et γ une courbe tracée dans Ω telle que $\gamma(0) = 0$ et $\gamma'(0) = v$. Alors $h \circ \gamma$ est une courbe dans M telle que $h \circ \gamma(0) = x_0$. Par définition de l'espace tangent, on a $D_0h.v \in T_{x_0}M$. Autrement dit, $\text{Im}(D_0h) \subset T_{x_0}M$ et là encore il y a égalité car les dimensions sont les mêmes.

Grphe. On se ramène à la définition implicite en considérant les applications $g_i - \text{Id}$. \square

Exemple 1. Dans le cas de la sphère $M = \mathbb{S}^d$ où $g(x) := \|x\|^2 - 1$, on a $D_{x_0}g(x) = 2\langle x_0, x \rangle$ et $T_{x_0}\mathbb{S}^d$ est l'hypersphère affine passant par x_0 et orthogonal à x_0 .

Exercice 8. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $S_\lambda = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = \lambda\}$.

1. Déterminez les valeurs de λ pour lesquelles S_λ est une sous-variété de \mathbb{R}^3 .
2. Pour $x, y \in \mathbb{R}^3$, soit $B(x, y) := x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$. Exprimer T_xS_λ à l'aide de B .

Exercice 9 ([Laf96], exercice 22 p. 47). Soit $M \subset \mathbb{R}^3$ une surface contenant l'origine et qui s'écrit localement $z = h(x, y)$.

1. Déterminer son plan tangent à l'origine.
2. On note $Q = D_0^2 h$ la hessienne de h en l'origine. Montrer que lorsque Q est définie positive (ou définie négative), il existe un voisinage de 0 dans M situé d'un seul côté de $T_0 M$. Que peut-on dire lorsque Q est dégénérée ?

Exercice 10 (Retour sur les sous-groupes de matrices classiques, [Rou03] exercice 94 p. 276).

1. Montrer que l'espace tangent en l'identité à $SL_n(\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des matrices de trace nulle.
2. Montrer que l'espace tangent en l'identité à $O_n(\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des matrices anti-symétriques.

Remarque 2. Au vu de la proposition 1, l'application exponentielle restreinte à l'espace tangent en l'identité, est donc une paramétrisation des groupes considérés. La généralisation de ce résultat est la base de la théorie des groupes et algèbres de Lie, voir [MT86].

3 Points critiques et extrema sur les variétés

On s'intéresse maintenant aux problèmes d'extrema sur les sous-variétés euclidiennes ainsi qu'aux valeurs et points critiques des applications différentiables.

3.1 Théorème des extrema liés

Théorème 5. Soient f et g_1, \dots, g_p des fonctions réelles de classe C^1 sur un ouvert U de \mathbb{R}^n . Soit X le lieu d'annulation des g_i i.e.

$$X := \{x \in U, g_1(x) = \dots = g_p(x) = 0\}.$$

Si la restriction de f à l'ensemble X admet un extremum local en $x_0 \in X$ et si les différentielles $(D_{x_0} g_i)_{i=1 \dots p}$ sont linéairement indépendantes, alors il existe des réels $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$, appelés multiplicateurs de Lagrange, tels que

$$D_{x_0} f = \lambda_1 D_{x_0} g_1 + \dots + \lambda_p D_{x_0} g_p.$$

Démonstration. Supposons que l'application f admette un extremum local en $x_0 \in X$. Alors pour toute courbe lisse paramétrée γ passant x_0 au temps 0, la fonction $f \circ \gamma$ admet également un extremum local, i.e. $D_{x_0} f \circ \gamma'(0) = 0$. L'ensemble des vecteurs dérivés $\gamma'(0)$ engendrant $T_{x_0} X$ par définition, le fait que f admette un extremum local en x_0 se traduit donc par le fait que la différentielle $D_{x_0} f$ restreinte à $T_{x_0} X$ est identiquement nulle :

$$D_{x_0} f|_{T_{x_0} X} \equiv 0.$$

La fin de la preuve se réduit à de l'algèbre linéaire puisque

$$T_{x_0} X = \bigcap_{i=1}^p \text{Ker}(g_i)$$

d'après la proposition 3 ci-dessus. Consulter [Ave97] p. 103 pour les détails. □

Exercice 11 (Inégalités classiques, [Sch67] p. 292). Soit $p > 1$ un réel. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on note $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$. On souhaite montrer que $\|\cdot\|_p$ satisfait l'inégalité triangulaire et fournit donc bien une norme.

1. On fixe $a, b > 0$. Montrer que $S_{a,b} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \|x\|_p = a, \|y\|_p = b\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.
2. Chercher les extrema relatifs de la fonction $\varphi : (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \|x + y\|_p^p$ sur la sous-variété $S_{a,b}$. Conclure.
3. Démontrer par la même méthode l'inégalité de Hölder dans le même contexte.

Exercice 12 (Section 1.1.2 p. 11 de [Laf96] (dernière édition), exercice 132 p. 403 de [Rou03]). Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine convexe délimité par une courbe régulière $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ simple et fermée (périodique). On fixe $n \geq 2$ un entier. On joue au billard dans D et on cherche une trajectoire qui se referme après exactement n rebonds sur le bord (réflexion cartésienne).

1. Trouver une solution lorsque $n = 2$.
2. On note Γ l'image de γ , i.e. le bord de D et on introduit l'application $\ell : \Gamma^n \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\ell(x_1, \dots, x_n) := \sum_{i=1}^n \|x_{i+1} - x_i\|,$$

où par convention on a posé $x_{n+1} := x_1$. Montrer que ℓ atteint son maximum en un point $(m_1, \dots, m_n) \in \Gamma^n$ où les m_i sont deux à deux distincts.

3. Constaté que l'on a ainsi produit une trajectoire qui se referme en n coups.

Exercice 13 ([Rou03], exercice 131 p. 401). Soient X une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble E à n éléments et f une fonction de E dans \mathbb{R} non constante. On définit l'entropie (de Shannon) de la variable X comme suit :

$$H(X) := - \sum_{x \in E} \mathbb{P}(X = x) \log(\mathbb{P}(X = x)).$$

Quelle est la loi de X si l'entropie $H(X)$ est maximale et que $\mathbb{E}[f(X)]$ est fixé ?

3.2 Lemme de Sard

Nous énonçons enfin quelques résultats de théorie de la mesure en lien avec les notions de sous-variété, de points et valeurs critiques des applications différentiables. Dans ce contexte de calcul/géométrie différentielle, ces résultats ont le mérite de faire intervenir des notions telles que la compacité, les formules de Taylor etc. et sont donc susceptibles d'être recasés ailleurs.

Proposition 4 ([Laf96] p. 38). Soit M une sous-variété de \mathbb{R}^n de dimension $d < n$. Alors M est de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue dans \mathbb{R}^n .

Démonstration. On commence par montrer le lemme suivant :

Lemme 1. Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 . L'image par f d'un ensemble de mesure nulle est de mesure nulle.

Preuve du lemme. Soit E un tel ensemble, il suffit de voir que pour toute boule fermée $B \subset U$, $f(E \cap B)$ est de mesure nulle. Si $K := \sup_{x \in B} \|D_x f\|$, le théorème des accroissements finis montre que f est K -lipschitzienne sur B et envoie donc tout pavé de mesure δ sur un ensemble de mesure au plus $K^n \delta$. Soit alors C une réunion de tels pavés recouvrant $E \cap B$ et telle que $\lambda(C) \leq \varepsilon$. Alors

$$\lambda(f(B \cap E)) \leq \lambda(f(C)) \leq K^n \varepsilon,$$

d'où le résultat. \square

Revenons à la preuve de la proposition. Il suffit de montrer que M est contenue dans un ouvert U tel que $U \cap M$ est de mesure nulle. D'après la définition d'une sous-variété euclidienne, il existe un ouvert U et un difféomorphisme $f : U \rightarrow V$ tel que

$$f(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\}).$$

Le membre de droite est bien sûr de mesure nulle (pour la mesure de Lebesgue dans \mathbb{R}^n) et on conclut grâce au lemme précédent appliqué à l'inverse de f . \square

Définition 4. Si f est une application lisse de $U \subset \mathbb{R}^m$ dans \mathbb{R}^n , un point $x \in U$ est dit critique si le rang de $D_x f$ est strictement inférieur à n . L'image d'un point critique est appelée valeur critique. Les points non critiques sont dits réguliers.

Théorème 6 (Lemme de Sard, [Laf96] p. 39). L'ensemble des valeurs critiques d'une application lisse de $U \subset \mathbb{R}^m$ dans \mathbb{R}^n est de mesure nulle.

Démonstration. On donne la preuve dans le cas $m \leq n$, l'autre cas est plus difficile. Tout d'abord, si $m < n$, tous les points sont critiques et on peut appliquer le lemme précédent à l'application $g : U \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $g(x, y) = f(x)$, d'où le résultat. Supposons donc que $m = n$. On a alors le lemme suivant :

Lemme 2. Si f est de classe C^1 sur U , pour tout compact convexe $K \subset U$, il existe un réel $\alpha > 0$ et une fonction $\kappa : [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant $\lim_{t \rightarrow 0} \kappa(t) = 0$, tels que

$$\|f(y) - f(x) - (D_x f)(y - x)\| < \kappa(\|x - y\|) \times \|x - y\|, \quad \forall x, y \in K, \|x - y\| < \alpha.$$

Preuve du lemme. On écrit la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 D_{x+t(y-x)} f(y-x) dt,$$

puis on utilise la continuité uniforme de $x \mapsto D_x f$ sur le compact K :

$$\begin{aligned} \|f(y) - f(x) - D_x f(y-x)\| &= \left\| \int_0^1 [D_{x+t(y-x)} f - D_x f](y-x) dt \right\| \\ &\leq \int_0^1 \|[D_{x+t(y-x)} f - D_x f](y-x)\| dt \\ &\leq \int_0^1 \|[D_{x+t(y-x)} f - D_x f]\| dt \times \|x - y\|. \end{aligned}$$

\square

On revient à la preuve du théorème. Soit C l'ensemble des points critiques de f . Il suffit de montrer que $f(C \cap A)$ est de mesure nulle pour tout cube A . Si $x \in C$, alors l'image de $D_x f$ est contenue dans un hyperplan H de \mathbb{R}^n . Soit alors $r > 0$ et y tel que $\|y - x\| < r$. D'après le dernier lemme, la distance de $f(y)$ à l'hyperplan H' parallèle à H et passant par $f(x)$ est inférieure à $\kappa(r)$. D'autre part, si $K = \sup_{x \in B} \|D_x f\|$, on a $\|f(x) - f(y)\| < Kr$. Ainsi $f(B(x, r))$ est inclus dans un cylindre de base $H' \cap B(f(x), Kr)$ et de hauteur $2r\kappa(r)$. En particulier, on a

$$\lambda(f(B(x, r))) \leq \frac{1}{K} \times (2rK)^n \kappa(r).$$

Soit a le côté du cube A , qui est donc inclus dans au plus $(ak)^n$ cubes de côté $1/k$. Chaque tel cube rencontrant C peut lui-même être inclus dans une boule $B(x, 2\sqrt{n}/k)$ où $x \in C$. Finalement, si $w_n r^n$ est le volume euclidien d'une boule de rayon r , on a

$$\lambda(f(A \cap C)) \leq \frac{w_n}{K} \left(ak \times 2 \times \frac{2\sqrt{n}}{k} \times K \right)^n \kappa \left(\frac{2\sqrt{n}}{k} \right) \leq C(n, a, K) \kappa \left(\frac{2\sqrt{n}}{k} \right),$$

d'où la conclusion en faisant tendre k vers l'infini. □

Pour finir sur une note culturelle, notons que le lemme de Sard est un pas important vers la démonstration du théorème de plongement de Whitney, qui montre que "toute" variété abstraite de dimension n peut être vue comme une sous-variété d'un espace euclidien de dimension suffisante :

Théorème 7 (Théorème de Whitney, [Pos90], leçons 14 (énoncé) et 15 (preuve)).

Toute variété différentiable séparée de dimension n et satisfaisant au deuxième axiome de dénombrabilité est plongeable dans \mathbb{R}^{2n+1} .

Références

- [Ave97] André Avez. *Calcul différentiel*. Masson, 1997.
- [BG87] Marcel Berger and Bernard Gostiaux. *Géométrie différentielle : variétés, courbes, surfaces*. PUF, 1987.
- [Laf96] Jacques Lafontaine. *Introduction aux variétés différentiables*. EDP Sciences, 1996.
- [MT86] Rached Mneimé and Frédéric Testard. *Introduction à théorie des groupes de Lie classiques*. Hermann, 1986.
- [Pos90] Mikhail Postnikov. *Leçons de géométrie, Variétés différentiables*. Mir, 1990.
- [Rou03] François Rouvière. *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation, 2ème édition*. Cassini, 2003.
- [Sch67] Laurent Schwartz. *Cours d'analyse, volume 2*. Hermann, 1967.