Planche 2

Prépa Agreg Rennes – EBAN 2014

12 novembre 2015

Exercice 1 Montrer que, pour $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$, l'espace $\mathcal{H}(\mathcal{U})$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts (qui est métrisable) n'est pas normable.

Exercice 2 Soit f une fonction réelle. On suppose qu'il existe une suite $(P_n)_n$ de polynômes convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f. Que dire de cette fonction ?

Exercice 3 On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad xy'' + y' + xy = 0.$$

1. Déterminer les solutions de (E) développables en série entière autour de 0.
2. Soit f_0 la solution développable en série entière autour de 0 telle que $f_0(0) = 1$ (il s'agit de la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 1) et f une solution de l'équation différentielle sur un intervalle $]0, a[$. Montrer que (f, f_0) est libre ssi f n'est pas bornée au voisinage de 0.

Remarque : On peut prouver que les solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficient analytiques sont aussi analytiques. Il s'agit ici de montrer que ce n'est pas réciproque : dans la forme canonique de cette équation différentielle, les coefficients ne sont pas analytiques en 0*, pourtant l'équation admet une solution analytique sur* $\mathbb{R}$

Exercice 4 Soient $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 et f la somme de cette série entière sur $\mathrm{D}(0, 1)$.
1. On suppose que la série $\sum a_n z^n$ converge uniformément sur $\mathrm{D}(0, 1)$. Montrer que f est limite uniforme de fonctions polynomiales sur $\mathrm{D}(0, 1)$.
2. Montrer que dans ce cas, f admet un prolongement continu à $\overline{\mathrm{D}(0, 1)}$.
3. Montrer la réciproque, c'est à dire que si f admet un prolongement continu à $\overline{\mathrm{D}(0, 1)}$, alors f est limite uniforme de polynômes sur $\mathrm{D}(0, 1)$.

Rappels sur le principe du maximum : Il est à noter que les fonctions holomorphes font parties de la classe des fonctions vérifiant la propriété de la moyenne (c.f. Objectif Agreg ou autre...). Ainsi elles vérifient les principes du maximum local et global, énoncés ci-dessous :

Théorème 1. *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{C}$. Si $|f|$ admet un maximum local en $a \in \mathcal{U}$, alors f est constante sur un voisinage de a.*

Théorème 2. *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert connexe et borné dans $\mathbb{C}$. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathcal{U}$ admettant un prolongement continu à $\overline{U}$. Notons M le maximum de $|f|$ sur $\partial\mathcal{U}$ (qui est compact). On a alors*
- *pour tout $z \in \mathcal{U}$, $|f(z)| \leq M$;*
- *s'il existe $z_0 \in \mathcal{U}$ tel que $|f(z_0)| = M$, alors f est constante sur $\mathcal{U}$.*

Les exercices qui suivent en sont des applications.

Exercice 5 Soient $\mathcal{U}$ un ouvert connexe et borné de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes sur $\mathcal{U}$ et continues sur $\overline{\mathcal{U}}$. Supposons que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur $\partial\mathcal{U}$. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur $\mathcal{U}$ et que sa limite est holomorphe sur $\mathcal{U}$.

Exercice 6 Soit $\mathcal{U}$ un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ contenant $\overline{\mathrm{D}(0,1)}$. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathcal{U}$ telle que $f(0) = 1$ et $|f(z)| \geq 2$ sur le cercle unité. Montrer que f s'annule au moins une fois sur le disque unité.