UFR Mathématiques
Université Rennes I

Préparation à l'agrégation
2015/2016

TD d'Analyse

Exercice 1: La fonction d' Airy

Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose
$$Ai(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx + i\frac{x^3}{3}} dx.$$

1. Montrer que $Ai(t)$ est bien définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ (on pourra faire une intégration par parties).
2. Pour $\varepsilon > 0$, on pose
$$y_\varepsilon(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx + i\frac{x^3}{3}} e^{-\varepsilon x^2} dx.$$
Montrer que y_ε est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que y_ε vérifie sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle:
$$y_\varepsilon'' - ty_\varepsilon - 2\varepsilon y_\varepsilon' = 0.$$
4. Montrer que y_ε converge uniformément vers Ai sur tout compact et que y_ε' est uniformément bornée sur tout compact.
5. En déduire que y_ε'' converge uniformément vers $t \to tAi(t)$ sur tout compact et qu'il existe une suite (ε_n) de réels strictement positifs convergeant vers 0 telle y'_{ε_n} converge uniformment sur tout compact.
6. Conclure que Ai est solution de l'équation différentielle
$$y'' - ty = 0.$$

Exercice 2: Estimation asymptotique de $\sum t^{n^2}$

On note $N(R)$ le nombre de points à coordonnées dans $\mathbb{Z}^2$ dans le disque fermé $\overline{D(0,R)}$ de centre 0 et de rayon R dans $\mathbb{R}^2$ et $N^+(R)$ le nombre de points dont les coordonnées sont de plus positives ou nulles.

1. Montrer que $N(R) \sim_{R\to+\infty} \pi R^2$ et que $N^+(R) \sim_{R\to+\infty} \frac{\pi}{4} R^2$ (Indic: Si $p \in \mathbb{Z}^2$, considérer le carré de côté 1 admettant p comme sommet inférieur gauche).

2. Soit $G(t) = (1-t)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n\geq 0} t^{n^2}$. Montrer que

$$G(t)^2 = \sum_{n\geq 0} N^+(\sqrt{n})t^n, \quad t \in [0,1[.$$

En déduire un équivalent de $\sum_{n\geq 0} t^{n^2}$ quand t tend vers 1^-.

Exercice 3: Le problème du cercle de Gauss, théorème de Sierpinski

1. Soit

$$J_0(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-} e^{it\sin} \; d\theta.$$

(a) Montrer que

$$\sup_{0\leq b}\left|\int_0^b \frac{e^{ir}}{\sqrt{r}}\,dr\right| < +\infty.$$

(b) Montrer que pour $1 \geq \; a \geq 0$

$$\int_a^1 \frac{e^{itu}}{\sqrt{1-u}}\,du = \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{2}})$$

quand t$\to +\infty$ uniformément en a.

(c) Montrer que

$$J_0(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \cos(tu)\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

(d) Montrer que $J_0(t) = \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{2}})$ quand $t \to +\infty$ (On pourra faire une intégration par parties).

2. Soit χ la fonction caractéristique du disque unité fermé de $\mathbb{R}^2$ et $\hat{\chi}$ sa transformée de Fourier:

$$\hat{\chi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-2i \;\; x\cdot} \; \chi(x)\,dx.$$

(a) Montrer que

$$\hat{\chi}(\xi) = 2\pi\int_0^1 J_0(2\pi rt)r\,dr, \quad t = |\xi|.$$

(b) Montrer que $\hat{\chi}(\xi) = \mathcal{O}(|\xi|^{-\frac{3}{2}})$ (Indic: On pourra utiliser l'expression de J_0 donnée en 1.(c) et poser le changement de variables $v = ru$).

3. Soient $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ et $g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} f(x+k)$.

(a) Montrer que g est $\mathbb{Z}^2$-périodique et exprimer ses coefficients de Fourier c_n en fonction de $\hat{f}(n)$.

(b) Montrer que (formule sommatoire de Poisson):

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^2} f(m) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^2} \hat{f}(m).$$

4. Soient $\chi_R(x) = \chi(x/R)$ et $\psi_{''}(x) = \varepsilon^{-2}\psi(x/\varepsilon)$ où ψ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support contenu dans le disque unité, positive et telle que $\int_{\mathbb{R}^2} \psi(x)\,dx = 1$. On rappelle que $N(R)$ désigne le nombre de points à coordonnées entières dans le disque fermé $\overline{D(0,R)}$.

   (a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et $R > 0$ on a

   $$\sum_{m\in\mathbb{Z}^2} \chi_R * \psi_{''}(m) = \pi R^2 + \sum_{m\neq 0} \pi R^2 \hat{\chi}(Rm)\hat{\psi}(\varepsilon m).$$

   (b) Montrer que si $d(x, S_R) \geq \varepsilon$ où S_R est le cercle de centre 0 et de rayon R, on a $\chi_R * \psi_{''}(x) = \chi_R(x)$. En déduire que pour tout $\varepsilon \in]0,1]$ et $R > 1$:

   $$\sum_{m\in\mathbb{Z}^2} \chi_{R-''} * \psi_{''}(m) \leq N(R) \leq \sum_{m\in\mathbb{Z}^2} \chi_{R+''} * \psi_{''}(m)$$

   (c) Montrer qu'il existe $K > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in]0,1]$ et $R > 1$:

   $$\Big|\sum_{m\neq 0} \pi R^2 \hat{\chi}(Rm)\hat{\psi}(\varepsilon m)\Big| \leq K R^{\frac{1}{2}} \sum_{m\neq 0} |m|^{-\frac{3}{2}} |\hat{\psi}(\varepsilon m)|.$$

   (d) Montrer que

   $$\sum_{m\neq 0} |m|^{-\frac{3}{2}} |\hat{\psi}(\varepsilon m)| = \mathcal{O}(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}).$$

   (e) Déduire des questions précédentes que l'on a uniformément pour $R \geq 2$ et $\varepsilon \in]0,1]$:

   $$N(R) = \pi R^2 + \mathcal{O}(\varepsilon R) + \mathcal{O}(R^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}).$$

   (f) En optimisant le choix de ε, montrer que

   $$N(R) = \pi R^2 + \mathcal{O}(R^{\frac{2}{3}}).$$

Références: Zuily-Queffélec, Chambert-Loir-Fermigier-Maillot T1, Lang (Real and Functional Analysis) Ch. 8