TD d'Analyse : Séries trigonométriques, séries de Fourier

Exercice 1

On se propose d'étudier la convergence de la série trigonométrique, ci-dessous notée S:

$$\sum_{n\geq 1} a_n \sin nx$$

où $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite de réels strictement positifs qui tend vers 0 en décroissant.

1. (a) Montrer que S converge simplement sur $[0,\, \pi]$ et uniformément sur tout intervalle $[\eta, \pi]$, $0 < \eta < \pi$.

   (b) A quelle condition S est-elle normalement convergente sur $[0,\, \pi]$?

2. On suppose dans cette question que S converge uniformément sur $[0, \pi]$.

   (a) Soit S_n la somme partielle d'indice n de S. Pour $l \geq 1$ et $x_l = \frac{\pi}{4l}$, montrer que

   $$S_{2l}(x_l) - S_l(x_l) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} l a_{2l}.$$

   (b) Montrer que $\lim_l l a_{2l} = 0$. Conclure que $\lim_k k\, a_k = 0$.

3. On va établir la réciproque de l'assertion de la question 2. On suppose donc que

   $$\lim_k k a_k = 0.$$

   On pose pour $n \geq 1$:

   $$\varepsilon_n = \sup\{k a_k,\, k \geq n\}, \quad V_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin\, kx, \quad R_n(x) = \sum_{k\geq n+1} a_k \sin\, kx.$$

   (a) Montrer que pour tout $x \in]0,\, \pi]$ et $n \geq 1$, $|V_n(x)| \leq \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \leq \frac{\pi}{x}$.

   (b) Pour $x \in]0, \pi[$, établir la relation

   $$R_n(x) = \sum_{k\geq n+1} (a_k - a_{k+1}) V_k(x) - a_{n+1} V_n(x).$$

(c) On fixe $x \in]0, \pi]$ et on désigne par l l'entier ≥ 1 tel que $\frac{\pi}{l+1} < x \leq \frac{\pi}{l}$. Montrer que:

$$\text{si } n \geq l, \quad |R_n(x)| \leq \frac{2\pi a_{n+1}}{x} \leq 2\varepsilon_{n+1},$$

et que

$$\text{si } n < l, \quad \Big|\sum_{k=n+1}^{l} a_k \sin kx\Big| \leq x \sum_{k=n+1}^{l} k a_k \leq \pi \varepsilon_{n+1}.$$

(d) Etablir que, pour tout $x \in [0, \pi]$ et tout $n \geq 1$, on a

$$|R_n(x)| \leq (2+\pi)\varepsilon_{n+1}.$$

Conclure que S converge uniformément sur $[0, \pi]$.

4. Un exemple. On pose $a_1 = 0$ et $a_n = 1/(n \log n)$.

(a) Utiliser ce qui précède pour montrer la convergence uniforme sur $[0, \pi]$ de la série S.

(b) Par comparaison avec la série $\sum_{n\geq 2} \frac{\sin^2 nx}{n \log n}$, montrer que S ne converge absolument pour aucun $x \in]0, \pi[$.

Exercice 2

Autour de la formule de Parseval.

A) Soit $f \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Pour $n \geq 1$, on pose

$$s_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x + \frac{k}{n}), \quad p.p.$$

Montrer que la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ converge dans L^2 vers la constante $\int_0^1 f(x)\,dx$.

B) Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et $r \in [0, R[$. On définit

$$I(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta.$$

Montrer que $r \mapsto I(r)$, définie sur $[0, R[$, est continue, croissante et convexe.

Exercice 3

Soit α, $0 < \alpha < 1$, f une fonction 2π périodique vérifiant la condition:

$$\exists \eta \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(y)| \leq \eta |x - y|^{\alpha}.$$

On note $c_n(f)$ les coefficients de Fourier de f et on rappelle les notations:

$$S_N(f)(x) = \sum_{-N}^{N} c_n(f)e^{inx}, \quad N \geq 0,\, x \in \mathbb{R}, \quad \sigma_N(f) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} S_k(f),\, N \geq 1.$$

1. Soient K_N, $N \geq 1$ les noyaux de Féjer définis par

$$K_N(x) = \frac{1}{N}\Big(\frac{\sin\frac{Nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\Big)^2.$$

   (a) Etablir que pour $x \in [-\pi, \pi]$,

$$K_N(x) \leq \frac{\pi^2}{N}\Big(\frac{\sin\frac{Nx}{2}}{x}\Big)^2 \leq \frac{\pi^2}{N}\inf\Big(\frac{1}{x^2}, \frac{N^2}{4}\Big).$$

   (b) En déduire l'existence d'une constante C telle que, pour tout $N \geq 1$,

$$||\sigma_N(f) - f||_\infty \leq \frac{C}{N^\alpha}.$$

2. Soient D_N, $N \geq 0$ les noyaux de Dirichlet définis par

$$D_N(x) = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

   Montrer qu'il existe une constante Δ telle que pour tout $N \geq 2$

$$||D_N||_1 \leq \int_0^{(N+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin y|}{y}\, dy \leq \Delta \ln N.$$

3. (a) Vérifier que $S_N(\sigma_N(f)) = \sigma_N(f)$ et établir l'inégalité

$$||f - S_N(f)||_\infty \leq ||f - \sigma_N(f)||_\infty (1 + ||D_N||_1).$$

   (b) Conclure que $S_N(f)$ converge vers f uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4

Soit f une fonction mesurable 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.

1. On suppose que f est $\mathbb{R}$-analytique.

   (a) Soient c_n les coefficients de Fourier de f. Justifier les relations

$$\sum_n |c_n| < +\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}.$$

(b) Montrer qu'il existe $b > 0$ et F_0 holomorphe dans l'ouvert

$$U_0 = \{z, \, , -\pi - b < \Re z < \pi + b, \, -b < \Im z < b\}$$

telle que pour tout $x \in U_0 \cap \mathbb{R}$, $F_0 = f$.

(c) En déduire qu'il existe F holomorphe dans $B_b = z, \quad |\Im z| < b$, 2π-périodique, telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = f(x)$.

(d) Montrer que pour tout β, $|\beta| < b$, et $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]} F(x + i\beta) e^{-in(x+i\beta)} \, dx.$$

(e) En déduire l'existence d'une constante C telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$|c_n| \leq C e^{-b|n|/2}.$$

2. Inversement, on suppose que les coefficients de Fourier de f vérifient l'inégalité ci-dessus.

(a) Justifier que

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}.$$

(b) Montrer que f est $\mathbb{R}$-analytique (on pourra utiliser que pour k entier naturel et x réel positif, $e^x \geq \frac{x^k}{k!}$).