**Exercice 1. Indice aléatoire.** Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé ; soit $N$ une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. réelles. On définit l'application $Y_N : \omega \mapsto Y_{N(\omega)}(\omega)$. Montrer que $Y_N$ est une v.a. réelle.

**Exercice 2. Fonction d'Euler.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ ; on choisit au hasard un des nombres $1, 2, \ldots, n$ — tous les choix étant équiprobables. Soit $p$ un entier non nul, avec $p \leqslant n$. Soit $A_p$ l'événement : "le nombre choisi est divisible par $p$".

1. Décrire l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dans lequel il est naturel de se placer. Calculer $\mathbb{P}\left(A_p\right)$ lorsque $p|n$.
2. Montrer que si $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sont des diviseurs premiers de $n$, distincts, alors les événements $A_{p_1}$, $A_{p_2}, \ldots, A_{p_k}$ sont mutuellement indépendants.
3. On rappelle que l'indicatrice d'Euler est la fonction $\phi$ qui, à un entier naturel $n$, associe le nombre d'entiers naturels non nuls inférieurs à $n$ et qui sont premiers avec lui. Montrer que :
$$\phi(n) = n \prod_{\substack{p \text{ premier} \\ p|n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

**Exercice 3. Moments des v.a. positives.**

1. Soit $X$ une v.a. positive et soit $p \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que : $\mathbb{E}\left[X^p\right] = p \int_0^\infty t^{p-1}\mathbb{P}(X > t)\,\mathrm{d}t$.
2. Soit $X$ une v.a. réelle. Déduire de la question précédente que $X$ est intégrable si et seulement si pour un ou pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(|X| > \varepsilon n\right) < \infty$ ou encore $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n\mathbb{P}\left(|X| > \varepsilon 2^n\right) < \infty$.

**Exercice 4. Variable aléatoire p.s. constante.** Soit $X$ une v.a. réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Soit $\mathcal{C}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$, telle que si $C \in \mathcal{C}$, alors $\mathbb{P}(C) = 0$ ou 1.

1. Montrer que si $X$ est $\mathcal{C}$-mesurable, alors $X$ est constante p.s. *(Indication : on pourra s'intéresser à la fonction de répartition de $X$.)*
2. Soit $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable. En déduire que si $f(X)$ et $X$ sont indépendantes, alors $f(X)$ est constante p.s.

**Exercice 5. Égalisation.** Soient $X$ et $Y$ deux v.a. réelles indépendantes. On suppose que la loi de $X$ est continue. Montrer que $\mathbb{P}(X = Y) = 0$.

**Exercice 6. Estimateur de la moyenne.** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. réelles définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, mutuellement indépendantes, de même espérance $m$, et de même variance $\sigma^2 > 0$.

1. On pose $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Calculer l'espérance et la variance de $\overline{X}_n$.
2. En déduire la loi faible des grands nombres : $\overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} m$.
3. Savez-vous comment justifier l'existence d'une famille dénombrable de v.a. réelles mutuellement indépendantes et de lois respectives données ?

**Exercice 7. Les grands esprits vont-ils se rencontrer ?** Nabilla B. et Kim K. projettent de se rencontrer entre 17h et 18h. Contrairement à ce que l'on pourrait penser, elles n'ont pas que cela à faire : chacune a annoncé à l'autre qu'elle n'attendrait pas plus de 10 minutes. On suppose qu'elles arrivent indépendamment à des instants uniformément distribués entre 17h et 18h.

1. Définir un espace probabilisé dans lequel il est naturel de se placer. Quelle est la probabilité que Kim et Nabilla se rencontrent effectivement ?
2. À présent, Nabilla fixe son heure d'arrivée à $x$.
   (a) L'aléa ne réside plus que dans l'heure d'arrivée de Kim : en déduire un nouvel espace probabilisé dans lequel travailler.
   (b) Quelle probabilité Nabilla a-t-elle de rencontrer Kim ? À quelle(s) heure(s) conseilleriez-vous à Nabilla d'arriver pour maximiser ses chances de rencontrer Kim ?
   (c) Arrivant à l'heure $x$, Nabilla ne trouve personne. Quelle probabilité a-t-elle de rencontrer Kim ?

**Exercice 8. Loi et arithmétique.** Exhiber des contre-exemples justifiant que :

1. $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X$ n'entraîne pas que $X_n - X \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} 0$ ;
2. si $X$, $Y$ et $Z$ sont telles que $X$ et $Y$ ont même loi, alors $XZ$ et $YZ$ n'ont pas forcément la même loi.

**Exercice 9. Convergence de la somme.** Soit $X$ une v.a. réelle, et soient $(X_n)$ et $(Y_n)$ deux suites de v.a. réelles telles que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X$ et $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$.

1. Montrer que $\mathbb{E}\left[\left|e^{itY_n} - 1\right|\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
2. En déduire que $X_n + Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X$.

**Exercice 10. Une loi forte des grands nombres.**

1. Soit $(X_n)$ une suite de v.a.i.i.d., centrées et admettant un moment d'ordre 4 fini.
   (a) On note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Exprimer $\mathbb{E}\left[S_n^4\right]$ en fonction des moments de $X_1$. En déduire une majoration de $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right)$.
   (b) Déduire de la question précédente que $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} 0$.
2. On ne suppose plus que les variables $X_n$ aient toutes la même loi, mais seulement que $\left(\mathbb{E}\left[X_n^4\right]\right)$ soit bornée. Montrer que le résultat reste vrai.
3. Et si les variables $X_n$ ne sont plus centrées ?

**Exercice 11. Une application non-probabiliste du théorème central limite.** Utiliser le théorème central limite pour montrer que $e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$.

**Exercice 12. Séries de v.a. indépendantes.** Soit une suite $(X_n)$ de v.a. mutuellement indépendantes.

1. Rappeler l'énoncé de la loi du 0-1.
2. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} X_n$ converge ou diverge presque sûrement.
3. On suppose désormais en plus que les v.a. sont positives. Montrer que la convergence presque sûre de la série $\sum_{n\geqslant 0} X_n$ équivaut à sa convergence en probabilité.

**Exercice 13. Retour en zéro.** Soit $(Y_n)$ une suite de v.a.i.i.d. de loi commune la loi de Bernoulli de paramètre $p \notin \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$. On considère la marche aléatoire $Z_n = Y_1 + \cdots + Y_n$, avec $Z_0 = 0$. L'événement $A_n = \{Z_n = 0\}$ constitue un "retour en zéro". Montrer que $\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0$. Que cela signifie-t-il ?

**Exercice 14. Première valeur record.** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.i.i.d. positives et de même fonction de répartition $F$. On suppose que $F$ est continue et que $F(x) < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $N$ le premier entier naturel $n$ pour lequel $X_n > X_0$, et soit $Y = X_N$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, et soit $\sigma$ une permutation de l'ensemble $[\![0, k]\!]$. Calculer $\mathbb{P}\left(X_{\sigma(0)} < X_{\sigma(1)} < \cdots < X_{\sigma(k)}\right)$.
2. En déduire $\mathbb{P}(N = n)$, montrer que $N < \infty$ p.s., puis calculer $\mathbb{E}[N]$.
3. Calculer $\mathbb{P}(N = n, Y \leqslant x)$ et en déduire la fonction de répartition de $Y$.

**Exercice 15. Une amélioration du TCL.**

1. Soit $(X_n)$ une suite de v.a. réelles qui converge en loi vers une v.a. $X$. On suppose que la fonction de répartition de $X$ est continue. Démontrer que la suite des fonctions de répartition des variables $X_n$ converge uniformément vers la fonction de répartition de $X$. En déduire une amélioration de l'énoncé du théorème central limite.
2. *Application 1 : la marche aléatoire simple symétrique sort de tout compact en un temps fini p.s.* On se place dans le réseau $\mathbb{Z}^d$ de $\mathbb{R}^d$, dont on note $(e_1, \ldots, e_d)$ la base canonique. Soit $(X_n)$ une suite de v.a.i.i.d. de loi uniforme sur l'ensemble des directions, c'est-à-dire $X_1 = \pm e_i$ avec probabilité $\dfrac{1}{2d}$. On note $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$, $A = ]-a; a]^d$ où $a > 0$ et $T = \inf\{n \in \mathbb{N}^* | S_n \notin A\}$. Montrer que $T < \infty$ p.s.
3. *Application 2 : un TCL pour le processus de renouvellement.* Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.i.i.d. positives et à fonction de répartition continue, de carré intégrable et dont on note $m$ l'espérance et $\sigma^2 > 0$ la variance. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} T_k$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $N_t = \max\{n \in \mathbb{N} | S_n \leqslant t\}$ désigne le nombre de renouvellements effectués jusqu'au temps $t$. Montrer successivement que :
   (a) $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ n'est pas bornée p.s. ;
   (b) $\dfrac{N_t}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{\text{p.s.}} \dfrac{1}{m}$ (loi forte des grands nombres) ;
   (c) $\sqrt{\dfrac{m^3}{t\sigma^2}}\left(\dfrac{N_t}{t} - \dfrac{1}{m}\right) \xrightarrow[t\to\infty]{\mathcal{L}} Z$, où $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ (théorème central limite).