

Td analyse agreg 1

Coralie Renault

4 septembre 2017

Exercice 1 (Polynômes de Hermite, Agreg 2010)

Pour tout entier naturel n , on définit la fonction H_n sur \mathbb{R} par

$$H_n(y) = (-1)^n e^{\frac{y^2}{2}} \frac{d^n}{dy^n} (e^{-\frac{y^2}{2}}):$$

1. Rappeler la valeur de $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$.
2. Calculer $H_0; H_1$ et H_2 .
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que H_n est une fonction polynomiale et en préciser le degré et le coefficient dominant.
4. On considère la mesure sur \mathbb{R} définie à partir de la mesure de Lebesgue grâce à la fonction de poids $y \mapsto e^{-\frac{y^2}{2}}$. On définit $L^2(\cdot)$ avec le produit scalaire

$$\langle f; g \rangle := \int_{\mathbb{R}} f(y)g(y) \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy = \int_{\mathbb{R}} fgd :$$

- a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est dans $L^2(\cdot)$.
- b) Montrer que $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de l'espace $L^2(\cdot)$.
- c) Calculer la norme de H_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 (Etude d'une famille de polynômes, 3a ENS 2008)

1. Vérifier que l'on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ par

$$\langle P; Q \rangle = \int_{-1}^1 P(x)Q(x)(1-x^2)dx$$

On notera $\|P\|$ la norme associée.

2. Construire une suite de polynômes (P_n) telle que P_n est de degré n et de coefficient dominant 1 telle que

$$i \neq j \Rightarrow \int_{-1}^1 P_i(x)P_j(x)(1-x^2)dx = 0:$$

Justifier l'unicité d'une telle suite et calculer $P_0; P_1; P_2$ et leur norme.

3. Montrer que P_n est orthogonal à tout polynômes de degré strictement inférieur.

4. En décomposant le polynôme $X P_n$ dans la base des P_k , montrer que les P_k vérifient une relation de récurrence d'ordre deux de la forme

$$P_{n+1} = (X - \alpha_n)P_n - \beta_n P_{n-1}:$$

Expliciter α_n et β_n en fonction de P_n et P_{n-1} .

5. Montrer que P_n admet exactement n racines simples situées dans l'intervalle $[-1; 1]$.
Indication : on pourra utiliser le polynôme

$$Q_n = \int_{-1}^1 (X - y) P_n(y) dy$$

où R est l'ensemble des racines de P_n dans $[-1; 1]$ de multiplicité impaire.

6. On note $(\alpha_k)_{k=1}^n$ les n racines de P_n rangées dans l'ordre croissant.

- a) Montrer qu'une racine α_k de P_n n'est pas racine de P_{n+1} .
b) Montrer que pour tout n et pour tous réels x, y , on a

$$\sum_{k=0}^n \frac{P_k(x)P_k(y)}{k P_k^2} = \frac{1}{k P_n^2} \frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_{n+1}(y)P_n(x)}{(x - y)}.$$

- c) En déduire que $P_{n+1}^0 P_n - P_n^0 P_{n+1} > 0$.
d) En déduire que $w_k^n < w_{k-1}^{n-1} < w_{k+1}^n$:

Exercice 3 (Densité des polynômes orthogonaux, dvp, objectif agrégation)

Le but est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 1

Soient I un intervalle de \mathbb{R} et w une fonction poids. S'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\int_I e^{-\delta|x|} w(x) dx < +\infty \quad (1)$$

alors la famille des polynômes orthogonaux associés à w forme une base hilbertienne de $L^2(I; w)$ pour la norme $\|\cdot\|_w$.

1. Soit w vérifiant (1) et $f \in L^2(I; w)$. On considère la fonction définie par

$$g(x) = \begin{cases} f(x) w(x) & \text{si } x \in I \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$$

Justifier que l'on peut considérer sa transformée de Fourier et que l'on peut écrire

$$\hat{g}(\xi) = \int_I f(x) e^{-i\xi x} w(x) dx:$$

2. Montrer que l'on peut prolonger \hat{g} en une fonction F holomorphe sur

$$B_a = \{z \in \mathbb{C}; |\operatorname{Im}(z)| < \frac{a}{2}\}:$$

3. On note $g_n(x) = x^n$. Calculer $F^{(n)}(0)$ et en déduire que si

$$\forall n \in \mathbb{N}; \langle f; g_n \rangle_I = \int_I f(x)x^n(x)ds = 0;$$

alors $f(x) = 0$ dans $L^2(I; \cdot)$.

4. Conclure.

5. Contre-exemple : on considère, sur $I =]0; +1[$, la fonction de poids

$$w(x) = x^{-\ln(x)}$$

Montrer que les polynômes orthogonaux pour le poids w ne forment pas une base hilbertienne de $L^2(I; w)$. On pourra considérer la fonction

$$f(x) = \sin(2 \ln(x)):$$

Exercice 4

Soit $f \in C([a; b]; \mathbb{R})$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_a^b x^n f(x) dx = 0$$

1. Montrer que la fonction f est nulle.

2. Calculer

$$I_n = \int_0^{+1} x^n (1-x)^x dx$$

3. En déduire qu'il existe f dans $C([0; +1]; \mathbb{R})$ non nulle, telle que, pour tout n dans \mathbb{N} , on ait

$$\int_0^{+1} x^n f(x) dx = 0$$

Exercice 5

Soit $E = C([0; 1]; \mathbb{R})$

1. $(E; \|\cdot\|_1)$ est-il complet ?

2. $(E; \|\cdot\|_1)$ est-il complet ?