Correction du TD sur les représentations du lundi 11 décembre 2017

Les exercices sont tirés des notes de cours « Représentations linéaires des groupes finis ».

Exercice 8.2

D'abord soulignons que la représentation triviale dont il est question est la représentation dans l'espace vectoriel $\mathbb{C}$ muni de l'action triviale de G. On la notera $\mathbf{1}$. (Parmi toutes les représentations triviales, celle qui est de dimension 1 est bien sûr la seule irréductible. Une représentation irréductible triviale est simplement un espace vectoriel de dimension 1 avec action triviale de G.) Choisissons une décomposition $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$ en somme directe de sous-représentations irréductibles, comme dans le théorème 5.1.1 du cours. La multiplicité de la représentation triviale est le nombre de celles des W_i qui sont $\simeq \mathbf{1}$. Notons m cette multiplicité et supposons, quitte à permuter, que les $W_i \simeq \mathbf{1}$ sont les m premières. Notons $E = W_1 \oplus \cdots \oplus W_m$. Comme l'action de G sur E est triviale, on a $E \subset V^G$. Si cette inclusion est stricte, il existe $x \in V^G$ qui n'appartient pas à E. Ce vecteur engendre une droite W_{m+1} sur laquelle l'action de G est triviale, et de plus la somme $E + W_{m+1}$ est directe et G-stable (action triviale !). En prenant un supplémentaire stable de $E \oplus W_{m+1}$ dans V et une décomposition en somme directe de sous-représentations irréductibles de ce supplémentaire, on construit une décomposition

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_m \oplus W_{m+1} \oplus \cdots \oplus W_t$$

dans laquelle le nombre de $W_i \simeq \mathbf{1}$ est $\geqslant m+1$, contradiction. Donc $E = V^G$ et en prenant les dimensions, on a $m = \dim V^G$.

Exercice 8.5

(1) Soit φ un caractère irréductible de G. C'est en particulier une fonction centrale, qui prend donc la même valeur notée $\varphi(C)$ sur tous les $g \in C$. On a :

$$\begin{aligned}(\delta_C, \varphi) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \delta_C(g)\overline{\varphi(g)} \text{ par définition du produit scalaire} \\ &= \frac{|C|}{|G|}\overline{\varphi(C)} \text{ car } \delta_C(g) = 1 \text{ quand } g \in C \text{ et } = 0 \text{ sinon.}\end{aligned}$$

Par ailleurs, notons $\delta_C = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \lambda_\chi(C)\chi$ l'écriture de δ_C sur la base des caractères irréductibles. Par orthogonalité, on a alors :

$$(\delta_C, \varphi) = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \lambda_\chi(C)(\chi, \varphi) = \lambda_\varphi(C).$$

Finalement $\lambda_\varphi(C) = (\delta_C, \varphi) = \frac{|C|}{|G|}\overline{\varphi(C)}$ donc $\delta_C = \frac{|C|}{|G|} \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \overline{\chi(C)} \cdot \chi$.

(2) Soit $h \in G$ et C' sa classe de conjugaison. Si $h \notin C$, on a $C' \neq C$ et :

$$0 = \delta_C(h) = \frac{|C|}{|G|} \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \overline{\chi(C)}\chi(h) = \frac{|C|}{|G|} \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \overline{\chi(C)}\chi(C').$$

Ceci montre que les vecteurs $(\chi(C))_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)}$ et $(\chi(C'))_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)}$, vecteurs colonnes de la table de caractères, sont orthogonaux pour le produit scalaire hermitien standard, dont l'expression est

$$\langle x, y \rangle = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} x_\chi \overline{y_\chi}$$

pour deux vecteurs $x = (x_\chi)_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)}$ et $y = (y_\chi)_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)}$. Si $h \in C$, on a $C' = C$ et :

$$1 = \delta_C(h) = \delta_C(C) = \frac{|C|}{|G|} \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \overline{\chi(C)}\chi(C) = \frac{|C|}{|G|} \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} |\chi(C)|^2.$$

Ceci montre que la norme du vecteur $(\chi(C))_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)}$ pour le produit scalaire $\langle -, - \rangle$ est égale à $|G|/|C|$.

Exercice 8.12

(1) La définition de $\mathbb{D}_3$ comme groupe des isométries du triangle équilatéral, engendré par une rotation plane r d'angle $2\pi/3$ et une réflexion s par rapport à une médiatrice du triangle, mène à la description :

$$\mathbb{D}_3 = \langle r, s | r^3 = s^2 = (rs)^2 = 1 \rangle = \{1, r, r^2, s, rs, r^2 s\}.$$

On notera que la relation $sr = r^{-1}s$ permet toujours de « passer les r à gauche » lorsqu'on effectue des produits dans le groupe diédral. Notons aussi qu'on peut préférer écrire

$$\mathbb{D}_3 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$$

c'est-à-dire écrire systématiquement les r à droite ; mais il faut choisir l'une des deux conventions (r à droite ou r à gauche) et s'y tenir, sous peine de catastrophe intersidérale. Les classes de conjugaison sont au nombre de trois : la classe $\{1\}$ qui est la seule classe réduite à un élément, la classe $\{r, r^2\}$, et la classe $\{s, r, r^2 s\}$. Géométriquement ces classes ont une signification : la première se passe de commentaire, la seconde regroupe les rotations, et la troisième regroupe les réflexions de droite.

Enfin, un dernier commentaire est que $\mathbb{D}_3 \simeq \mathfrak{S}_3$, qui est le seul groupe non commutatif d'ordre 6, mais c'est le seul isomorphisme entre un groupe diédral et un groupe symétrique. Suggestions d'exercices pour la lectrice ou le lecteur (ou les deux) :

- vérifier qu'on sait faire correspondre les classes de conjugaison du côté $\mathbb{D}_3$ et du côté $\mathfrak{S}_3$.

- construire un isomorphisme de représentations explicite entre la représentation du triangle équilatéral pour $\mathbb{D}_3$ et la représentation dans l'hyperplan d'équation $x + y + z = 0$, voir exemple 4.1.3 des notes de cours, pour le groupe $\mathfrak{S}_3$.

Revenons à nos moutons. La représentation $\rho : \mathbb{D}_3 \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ est ici donnée par des matrices explicites, voir le § 6.2 dans le cours. Si on place le triangle avec un sommet en $(1, 0)$ et centre de gravité en l'origine, on a

$$\rho(r) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi/3) & \sin(2\pi/3) \\ \sin(2\pi/3) & -\cos(2\pi/3) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \rho(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La valeur du caractère $\chi = \chi_\rho$ sur les trois classes de conjugaison est alors facile à calculer :

$$\begin{aligned} &\chi(1) = 2 \\ &\chi(r) = 2\cos(2\pi/3) = -1 \\ &\chi(s) = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

(2) Démonstration directe du fait que V est irréductible (voir § 6.2 du cours) : une sous-représentation de dimension 1 est une droite qui est stable par toutes les transformations g_V avec $g \in G$; il c'est donc simplement une droite r_V-stable et s_V-stable ; il n'y a pas de telle droite stable car les droites propres pour s_V, c'est-à-dire l'axe des abscisses et celui des ordonnées, ne sont pas stables par r_V (prendre garde au fait que r_V n'a pas de valeur propre réelle, mais elle a des valeurs propres complexes et nous travaillons avec la représentation complexe)

Démonstration à l'aide du critère 5.1.4 du cours : l'irréductibilité découle du simple calcul :

$$(\chi, \chi) = \frac{1}{6}(|\chi(1)|^2 + 2 \cdot |\chi(r)|^2 + 3|\chi(s)|^2) = \frac{1}{6}(2^2 + 2 + 0) = 1.$$

Attention de bien pondérer les nombres $|\chi(C)|^2$, pour chaque classe de conjugaison C, par le cardinal de ladite classe.

(3) Nous avons vu en cours le fait que lorsqu'on a un morphisme de groupes $u : G \to H$, toute représentation $\rho : H \to \mathrm{GL}(V)$ induit une représentation $\rho' = \rho \circ u : G \to \mathrm{GL}(V)$ pour G. Nous avons vu aussi que si u est surjectif et ρ irréductible, alors ρ' est aussi irréductible. Ces faits s'appliquent ici avec le morphisme surjectif $\mathfrak{S}_4 \rightrightarrows \mathfrak{S}_4/V \simeq \mathfrak{S}_3$ où V est le sous-groupe engendré par les doubles transpositions.