

Corrigé du problème de Mathématiques générales 2017

Matthieu Romagny, 12 septembre 2017

Exercices préliminaires.

P1 : Matrices de rang 1. Si A est de rang 1, elle possède une colonne non nulle, notons-la X , dont toutes les autres sont multiples. Soit $y_j \in K$ tel que la j -ème colonne est égale à $y_j X$. Alors $A = (y_1 X \mid y_2 X \mid \dots \mid y_m X) = XY$, où l'on a noté $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$. De plus, Y est évidemment non nulle puisque A est non nulle.

Réciproquement, considérons la matrice $A = XY$ avec $X \in K^n$ et $Y \in (K^m)^*$ deux vecteurs non nuls. Soit j tel que $y_j \neq 0$. Toutes les colonnes de A sont multiples de X , et la j -ème égale à $y_j X$ est non nulle. Ceci montre que l'image de l'endomorphisme associé est la droite engendrée par X , donc A est de rang 1.

Il est clair que si $X' = \lambda X$ et $Y' = \lambda^{-1} Y$ pour un certain $\lambda \in K^*$, alors $XY = X'Y'$. Comme K^* est infini on voit donc que l'écriture n'est jamais unique. Montrons que réciproquement, si $XY = X'Y'$ alors il existe $\lambda \in K^*$ tel que $X' = \lambda X$ et $Y' = \lambda^{-1} Y$. Nous avons vu plus haut que X est un vecteur directeur de la droite image de A . Comme la même chose est vraie pour X' , il existe $\lambda \in K^*$ tel que $X' = \lambda X$. En appliquant la même observation à la transposée ${}^t A = {}^t Y {}^t X$ qui est encore de rang 1, on obtient l'existence de $\mu \in K^*$ tel que ${}^t Y' = \mu {}^t Y$ donc $Y' = \mu Y$. De $XY = X'Y' = \lambda \mu XY \neq 0$ on déduit que $\mu = \lambda^{-1}$.

Commentaire : s'il n'y avait pas d'hypothèse sur K ... pour $K = \mathbb{F}_2$, le groupe $K^ = \mathbb{F}_2^*$ ne contient qu'un élément, donc l'écriture sous la forme $A = XY$ est en fait unique! Cette remarque anecdotique vous invite à faire bien attention aux spécificités des corps finis. Le même phénomène se produit lorsqu'on cherche à donner un sens précis à l'affirmation « il n'existe pas d'isomorphisme canonique entre un espace vectoriel et son dual », comme vous pourrez le voir dans la note « Que veut dire être canonique ? » disponible ici.*

P2 : Dual de $\mathcal{M}_{n,m}(K)$. On prend bien garde au fait que pour $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$, l'application f_A définit bien une forme sur $\mathcal{M}_{n,m}(K)$ et non sur $\mathcal{M}_{m,n}(K)$. Comme la trace est linéaire, pour tous λ, μ dans K et pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$ on a $f_{\lambda A + \mu B}(M) = \lambda \operatorname{Tr}(AM) + \mu \operatorname{Tr}(BM) = (\lambda f_A + \mu f_B)(M)$. Ceci démontre que l'application $f : \mathcal{M}_{m,n}(K) \rightarrow (\mathcal{M}_{n,m}(K))^*$ est linéaire. Montrons que de plus elle est injective. Notons $E_{r,s}$ la matrice dont le seul coefficient non nul est en position (r, s) et vaut 1. Le seul coefficient diagonal non nul de $AE_{r,s}$ est celui d'indice (s, s) qui vaut $a_{s,r}$. Il s'ensuit que si $f_A = 0$ alors $0 = \operatorname{Tr}(AE_{r,s}) = a_{s,r}$ pour tous r, s . Ceci démontre que $A = 0$. Finalement f est linéaire, injective entre deux espaces de même dimension égale à nm , il s'ensuit que f est bijective. C'est donc un isomorphisme.

P3 : Matrices associées à une application linéaire donnée. (c) On sait que le rang d'une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$ est invariant par l'équivalence des matrices, c'est-à-dire est le même pour toutes les matrices PMQ^{-1} avec $P \in GL_n(K)$ et $Q \in GL_m(K)$. Ainsi, le rang d'une application linéaire est égal à celui d'une matrice qui le représente dans des bases choisies de manière quelconque (puisque changer de bases revient à remplacer la matrice par une matrice équivalente). Ceci démontre qu'il existe des bases \mathcal{B} et \mathcal{C} pour E et F telles que $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$ si et seulement si A et u ont même rang.

1. Réduction de Jordan

1. Considérons l'application $f : K[X] \rightarrow \mathcal{L}(E)$ qui envoie un polynôme P sur l'endomorphisme $P(u)$. C'est un morphisme de K -algèbres. Comme il est rappelé dans l'énoncé, son

1

noyau est l'idéal I_u qui est engendré par le polynôme minimal π_u (on note que $I_u \neq 0$ car $K[X]$ est de dimension infinie et $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie). Par définition $K[u]$ est l'image de f . L'isomorphisme $K[X]/\ker(f) \xrightarrow{\sim} \text{im}(f)$ donne la relation $K[X]/(\pi_u) \xrightarrow{\sim} K[u]$. En prenant les dimensions on voit que $\dim_K(K[u]) = \dim_K(K[X]/(\pi_u)) = \deg(\pi_u)$.

2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Si u est nilpotent, alors $v := u^p$ est nilpotent. Soit $r \geq 1$ son indice de nilpotence, de sorte que $v^r = 0$. Alors v est annulé par le polynôme X^r qui est scindé, il est donc trigonalisable. Comme les valeurs propres de v sont des racines de X^r elles sont toutes nulles, la trace est leur somme qui est nulle.

1

3.(a) Comme $\text{pgcd}(X^k, Q) = 1$, il s'agit simplement du lemme des noyaux. (*Il est possible que cet argument ait été considéré comme suffisant par les correcteurs.*) Voici un peu plus de détail. Nous utiliserons constamment le fait que les polynômes en u commutent entre eux, puisque $K[u]$ est commutative. Soit $x \in E$. Comme X^k et Q sont premiers entre eux, on peut choisir une relation de Bézout $AX^k + BQ = 1$. En évaluant en u on trouve la relation

1

$$(\star) \quad A(u)u^k + B(u)Q(u) = \text{id}_E.$$

Comme π_u annule u , l'endomorphisme $v := A(u)u^k$ est à valeurs dans G et l'endomorphisme $w := B(u)Q(u)$ est à valeurs dans F . En évaluant (\star) sur x , on obtient donc $x = v(x) + w(x) \in G + F$. Par ailleurs, si $x \in F \cap G$ alors en évaluant (\star) sur x on trouve $0 + 0 = x$ donc $x = 0$. Ceci montre que E est somme directe de F et G . Le fait que F et G sont u -stables est général pour tout noyau $H := \ker(P(u))$ d'un polynôme en u , puisque $P(u)(u(x)) = u(P(u)(x)) = u(0) = 0$ si $P(u)(x) = 0$.

3.(b) Puisque G est stable, pour tout $x \in G$ on a $(u_G)^k(x) = u^k(x)$ pour tout entier $k \geq 0$. Il en découle que pour tout polynôme P , l'endomorphisme $P(u_G) : G \rightarrow G$ est égal à la restriction à G de l'endomorphisme $P(u) : E \rightarrow E$. En particulier, pour $x \in G$ on a $(Q(u_G))(x) = (Q(u))(x) = 0_{\mathcal{L}(E)}(x) = 0$ ce qui montre que $Q(u_G) = 0$. Pour la suite de la question notons $v := u_G$ pour simplifier. Notons $d = \deg(Q)$. L'hypothèse $G \neq 0$ implique $d \geq 1$, car si l'on avait $d = 0$ alors Q serait constant donc nul (puisque $Q(u_G) = 0$) ce qui est impossible puisqu'il est facteur de π_u . Notons $Q = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \dots + a_1X + a_0$. Comme Q est premier avec X , on a $a_0 \neq 0$. Considérons l'égalité : $Q(v) = v^d + a_{d-1}v^{d-1} + \dots + a_1v + a_0 = 0$ puis en prenant la trace :

1

$$\text{Tr}(v^d) + a_{d-1} \text{Tr}(v^{d-1}) + \dots + a_1 \text{Tr}(v) + e \cdot a_0 = 0,$$

où $e = \dim(G) \geq 1$ puisque $G \neq 0$. Puisque K est de caractéristique nulle on a $ea_0 \neq 0$ (*en caractéristique $p > 0$ avec par exemple $e = p$ cet argument s'effondrerait !*), donc l'une des traces doit être non nulle i.e. il existe $i \in \{1, \dots, d\}$ tel que $\text{Tr}(v^i) \neq 0$. On a bien trouvé $i > 0$ tel que $\text{Tr}(u_G^i) \neq 0$. Enfin, notons u_F l'endomorphisme de F induit par u . C'est un endomorphisme nilpotent (annulé par X^k) de même que toutes ses puissances. Comme E est somme directe de F et G , en prenant une base adaptée à cette décomposition on voit que $\text{Tr}(u^j) = \text{Tr}(u_G^j) + \text{Tr}(u_F^j) = \text{Tr}(u_G^j)$ pour tout $j \geq 0$. En particulier $\text{Tr}(u^i) = \text{Tr}(u_G^i) \neq 0$.

2

1

Commentaire : il s'agit d'un fait classique que l'on peut trouver par exemple dans Mansuy et Mneimné ou même dans Gourdon. Contrairement à ces deux références, la démonstration proposée ici évite l'introduction des valeurs propres de u dans une clôture algébrique du corps K . Elle utilise (sans donner son nom) la décomposition de Fitting que l'on peut trouver dans Mansuy et Mneimné, exercice 5.2 du chap. IV, ou dans Francinou-Gianella-Nicolas Algèbre 1, exercice 6.14.

3.(c) Les questions précédentes impliquent une réciproque au résultat de la question 2. En effet, l'hypothèse que $\text{Tr}(u^p) = 0$ pour tout $p \geq 1$ jointe au résultat de la question 3.(b) montre que $G = 0$. On en déduit que $E = F$ sur lequel u est nilpotent, annulé par X^k .

1

4.(a) Comme $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est une base, il existe des scalaires a_0, a_1, \dots, a_{n-1} tels que $v(x_0) = a_0x_0 + a_1u(x_0) + \dots + a_{n-1}u^{n-1}(x_0)$. Notant $P := a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1}$, ceci signifie que $v(x_0) = P(u)(x_0)$.

1

4.(b) Nous avons déjà mentionné et utilisé le fait que l'algèbre $K[u]$ est commutative. En particulier $K[u] \subset \mathcal{C}(u)$. Pour la même raison $P(u)$ commute avec u^k pour tout entier $k \geq 0$. Par ailleurs comme v commute avec u , il commute lui aussi avec u^k pour tout $k \geq 0$. On déduit de (a), par application de u^k , que $v(u^k(x_0)) = P(u)(u^k(x_0))$. Ainsi v et $P(u)$ coïncident sur tous les éléments de $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ qui est un système générateur de E , donc $v = P(u)$. Ceci démontre que $\mathcal{C}(u) \subset K[u]$ donc finalement $K[u] = \mathcal{C}(u)$.

1

5. Montrons que u est cyclique ssi ses valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont distinctes deux à deux.

Supposons d'abord les λ_i distinctes deux à deux. Alors les espaces propres E_i sont des droites engendrées par des vecteurs propres x_i . Nous allons montrer que le vecteur $x_0 := x_1 + \dots + x_n$ est cyclique. Pour cela soit P un polynôme non nul, de degré minimal, tel que $P(u)(x_0) = 0$; notons que $\deg(P) \leq n$ puisque $(x_0, u(x_0), \dots, u^n(x_0))$ est liée. Nous avons $P(u)(x_1) + \dots + P(u)(x_n) = 0$. Comme E_i est u -stable donc aussi $P(u)$ -stable, on a $P(u)(x_i) \in E_i$ pour tout i . Les E_i étant en somme directe, on déduit $P(u)(x_i) = 0$, c'est-à-dire $P(\lambda_i)x_i = 0$ puisque x_i est vecteur propre pour λ_i . Il s'ensuit que $P(\lambda_i) = 0$ donc chaque $X - \lambda_i$ divise P . Comme ces polynômes sont premiers entre eux deux à deux, on déduit que leur produit $\prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$ divise P . Alors $n \leq \deg(P) \leq n$ et on a égalité. Comme P est choisi de degré minimal, la famille $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est libre donc c'est une base et x_0 est cyclique.

2

Réciproquement supposons qu'une valeur propre est au moins double, disons la première. Dans une base de diagonalisation de u , sa matrice est diagonale à éléments diagonaux $\lambda_1, \lambda_1, \lambda_3, \dots, \lambda_n$. Alors l'espace des matrices diagonales par blocs avec $n - 1$ blocs de tailles respectives $(2, 1, 1, \dots, 1)$ est clairement inclus dans le commutant $\mathcal{C}(u)$. Sa dimension est $4 + (n - 2) = n + 2$ donc $n + 2 \leq \dim \mathcal{C}(u)$. Comme $\dim K[u] = \deg(\pi_u) \leq n$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on ne peut avoir $K[u] = \mathcal{C}(u)$. Il découle de la question 4. que u n'est pas cyclique.

2

6. Soit $d = \dim \text{im}(u)$ et $e = \dim \ker(u)$. D'après le théorème du rang, $d + e = 4$. Par ailleurs les relations $u^2 = 0$ et $u \neq 0$ entraînent que $\text{im}(u) \subset \ker(u)$, donc $d \leq e$, et que $d \geq 1$. Les seules possibilités sont donc $(d, e) = (1, 3)$ et $(d, e) = (2, 2)$.

1

Dans le premier cas, soit e_1 un vecteur tel que $e_2 := u(e_1)$ engendre la droite $\text{im}(u)$ et complétons (e_2) en une base (e_2, e_3, e_4) de $\ker(u)$. Comme $e_1 \notin \ker(u)$, l'ensemble (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base de E . Dans cette base, la matrice de u est $\begin{pmatrix} C_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1

Dans le second cas, soient e_1, e_3 deux vecteurs tels que $e_2 := u(e_1)$ et $e_4 := u(e_3)$ forment une base du plan $\text{im}(u)$. Aucune combinaison inéaire non triviale $ae_1 + be_3$ ne peut appartenir à $\ker(u)$, car sinon en prenant les images par u on aurait une relation de liaison entre e_2 et e_4 . Ceci montre que (e_1, e_3) engendre un plan qui est en somme directe avec $\ker(u)$. Ainsi (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base de E , dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} C_2 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix}$.

1

7.(a) Comme $H \subset \ker(u)$, pour tout $x_0 \in H$ non nul on a $u(x_0) = 0$ si bien que le sous-espace engendré par la collection des puissances $u^i(x_0)$ est la droite Kx_0 et est u -stable. Donc les sous-espaces cycliques de H sont les droites engendrées par des vecteurs $x_0 \neq 0$.

1

7.(b) Pour chaque k considérons l'application linéaire $\alpha_k : K[X] \rightarrow E$, $P \mapsto P(u)(x_k)$. Son noyau est un idéal de $K[X]$, donc engendré par un unique polynôme unitaire μ_k . Soit r l'indice de nilpotence de u , alors $u^r = 0$ donc $X^r \in \ker(\alpha_k)$. Alors μ_k divise X^r et est donc de la forme $\mu_k = X^d$ avec $d = d_k \leq r$ entier dépendant de k . Pour chaque k , on peut considérer aussi l'application linéaire $\beta_k : K[X] \rightarrow E$, $P \mapsto P(u)(y_k)$. Il est clair que son noyau est l'idéal engendré par X^{d_k-1} . Au passage, on note que l'image de β_k est l'espace cyclique F_k qui est de dimension ≥ 1 , ce qui montre que $d_k \geq 2$. (Le cas $r = 1$ correspondant à $u = 0$ est trivial et est écarté.) Ce qui précède montre que $K[u](x_k) = \text{Vect}(x_k, u(x_k), \dots, u^{d_k-1}(x_k))$ et $K[u](y_k) = \text{Vect}(y_k, u(y_k), \dots, u^{d_k-2}(y_k)) = \text{Vect}(u(x_k), \dots, u^{d_k-1}(x_k))$.

2

Montrons que les espaces $E_k := K[u](x_k)$ et H sont en somme directe. Partons d'une relation $h + \sum_{k=0}^p r_k = 0$ avec $h \in H$ et $r_k \in E_k$ écrit sous la forme $r_k = a_{k,0}x_k + a_{k,1}u(x_k) + \dots + a_{k,d_k-1}u^{d_k-1}(x_k)$. En appliquant u et en utilisant le fait que les F_k sont en somme directe, on trouve que $a_{k,0} = a_{k,1} = \dots = a_{k,d_k-2}$ pour chaque k . La relation initiale s'écrit donc $h + \sum_{k=0}^p a_{k,d_k-1}u^{d_k-1}(x_k) = 0$. Le fait que $d_k \geq 2$ entraîne que le terme $a_{k,d_k-1}u^{d_k-1}(x_k)$ appartient à $F_k \cap \ker(u)$ qui est inclus dans G . La définition de H implique que $h = \sum_{k=0}^p a_{k,d_k-1}u^{d_k-1}(x_k) = 0$. Enfin on voit que $a_{k,d_k-1} = 0$ une fois encore parce que les F_k sont en somme directe. Ainsi les E_k et H sont en somme directe.

2

Il reste à montrer que la somme est égale à E . Soit $x \in E$ et $(P_k)_{k=1}^p$ des polynômes tels que $u(x) = \sum_{k=1}^p P_k(u)(y_k)$. On voit alors que $x - \sum_{k=1}^p P_k(u)(x_k) \in \ker(u)$. Par définition de G et H on peut écrire $x - \sum_{k=1}^p P_k(u)(x_k) = g + h$ avec $g \in G$ et $h \in H$. Comme $G \subset \text{im}(u)$ on peut choisir des polynômes $(Q_k)_{k=1}^p$ tels que $g = \sum_{k=1}^p Q_k(u)(y_k) = \sum_{k=1}^p uQ_k(u)(x_k)$. Posant $R_k = P_k + XQ_k$, on trouve $x = \sum_{k=1}^p R_k(u)(x_k) + h$ comme voulu.

2

Commentaire : pour $x \in E$, le polynôme générateur unitaire du noyau de $\alpha : K[X] \rightarrow E$, $P \mapsto P(u)(x)$ est parfois appelé polynôme minimal ponctuel de x . Son utilisation est classique dans l'étude des endomorphismes cycliques. On prendra garde au fait que α n'est pas un morphisme d'algèbres (E n'est même pas une algèbre !) si bien que le fait que $\ker(\alpha)$ soit un idéal est un fait moins trivial que dans le cas du morphisme $K[X] \rightarrow \mathcal{L}(E)$, $P \mapsto P(u)$ associé à un endomorphisme.

7.(c) D'après 7.(a), n'importe quelle base de H en fournit une décomposition en droites qui est une décomposition en somme directe d'espaces cycliques. La décomposition de 7.(b) fournit donc une décomposition en espaces cycliques qui achève la récurrence. Le théorème énoncé au début de 7 est donc prouvé.

1

II. Bicommutant

1. Par hypothèse, il existe un automorphisme f tel que $v = fuf^{-1}$. Montrons que $\mathcal{C}(v) = f\mathcal{C}(u)f^{-1}$:

$$x \in \mathcal{C}(v) \iff x f u f^{-1} = f u f^{-1} x \iff f^{-1} x f u = u f^{-1} x f \iff f^{-1} x f \in \mathcal{C}(u) \iff x \in f\mathcal{C}(u)f^{-1}.$$

Montrons maintenant que $\mathcal{C}\mathcal{C}(v) = f\mathcal{C}\mathcal{C}(u)f^{-1}$. En effet, $y \in \mathcal{C}\mathcal{C}(v)$ ssi $yz = zy$ pour tout $z \in \mathcal{C}(v) = f\mathcal{C}(u)f^{-1}$, ssi $yfaf^{-1} = faf^{-1}y$ pour tout $a \in \mathcal{C}(u)$, ssi $f^{-1}yf \in \mathcal{C}\mathcal{C}(u)$, ssi $y \in f\mathcal{C}\mathcal{C}(u)f^{-1}$.

2

Le résultat demandé en découle en prenant les dimensions.

2. On sait que si un endomorphisme commute avec u , il commute avec tous les polynômes en u , en d'autres termes $\mathcal{C}(u) \subset \mathcal{C}(K[u])$. Or il découle de la définition générale que $U_1 \subset U_2$ entraîne $\mathcal{C}(U_2) \subset \mathcal{C}(U_1)$. On déduit que $\mathcal{C}\mathcal{C}(K[u]) \subset \mathcal{C}\mathcal{C}(u)$. Une autre propriété générale est

1

que $U \subset \mathcal{CC}(U)$. En effet, si $u \in U$, alors par définition de $\mathcal{C}(U)$, tout $x \in \mathcal{C}(U)$ commute avec u . Appliquant cette propriété pour $U = K[u]$ donne $K[u] \subset \mathcal{CC}(K[u])$.

Finalement $K[u] \subset \mathcal{CC}(K[u]) \subset \mathcal{CC}(u)$. On aura donc l'égalité $K[u] = \mathcal{CC}(u)$ si et seulement si on a égalité des dimensions. Comme $\dim K[u] = \deg(\pi_u)$ d'après I.1, le résultat demandé s'ensuit.

1

3. Le rang de M comme élément de $M_n(K)$ est la taille r maximale d'une matrice extraite $m \in M_r(K)$ de M dont le déterminant est non nul. Clairement, les matrices extraites de M vue comme élément de $M_n(L)$ sont les mêmes que les matrices extraites de M vue comme élément de $M_n(K)$. Comme la non-annulation de $\det(m)$ ne dépend pas du surcorps $L \supset K$, on voit que r est aussi le rang de M comme élément de $M_n(L)$.

2

4. Notons $\pi_{M,K}$ resp. $\pi_{M,L}$ le polynôme minimal de M vue comme élément de $M_n(K)$ resp. de $M_n(L)$. Comme $\pi_{M,K}$ annule M dans $M_n(K)$ il l'annule aussi dans $M_n(L)$, donc $\pi_{M,K}$ est divisible par $\pi_{M,L}$.

1

Par ailleurs nous avons montré que $\deg(\pi_{M,K})$ est égal à la dimension de l'algèbre $K[M] \subset M_n(K)$. Cette algèbre est par définition le sous-espace vectoriel engendré par $\text{id}, M, M^2, \dots, M^{n-1}$. Ainsi $\deg(\pi_{M,K}) = \text{rang}(\text{id}, M, M^2, \dots, M^{n-1})$. D'après la question précédente le rang d'une matrice ne dépend pas du surcorps $L \supset K$, d'où $\deg(\pi_{M,K}) = \deg(\pi_{M,L})$. Deux polynômes de degrés égaux et qui se divisent sont égaux, d'où le résultat.

2

5. D'après les questions 2 et 4 on a $\dim_K(\mathcal{CC}_K(M)) = \deg(\pi_{M,K}) = \deg(\pi_{M,L}) = \dim_L(\mathcal{CC}_L(M))$.

1

6.(a) D'après les règles de calcul par blocs, si $A' \in \mathcal{C}(A)$ et $B' \in \mathcal{C}(B)$ alors $\begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}$ est dans le commutant de $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$. Comme $A' = I$ et $B' = 0$ commutent avec toutes les matrices, le résultat s'en déduit.

1

6.(b) Soit $X = \begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$ une matrice avec la même décomposition par blocs que $Y := \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $XY = \begin{pmatrix} R & 0 \\ T & 0 \end{pmatrix}$ tandis que $YX = \begin{pmatrix} R & S \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On voit que $X \in \mathcal{C}(Y)$ si et seulement si $S = T = 0$. En d'autres termes le commutant de Y est composé des matrices diagonales par blocs $\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$.

1

6.(c) Notons \mathcal{E} l'ensemble des matrices de la forme $X = \begin{pmatrix} P(A) & 0 \\ 0 & Q(B) \end{pmatrix}$ avec $P, Q \in K[X]$. Soit $X = \begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$ une matrice du bicommutant de M . Alors X commute avec $Y = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ d'après 6.(a), donc $S = T = 0$ d'après 6.(b). Parmi les matrices qui commutent avec M on trouve toutes les matrices $\begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}$ avec $A' \in \mathcal{C}(A)$ et $B' \in \mathcal{C}(B)$. La relation $X \in \mathcal{CC}(M)$ implique donc que $R \in \mathcal{CC}(A)$ et $U \in \mathcal{CC}(B)$. Comme on suppose que le théorème du bicommutant est valable pour A et B , il s'ensuit qu'il existe des polynômes $P, Q \in K[X]$ tels que $R = P(A)$ et $U = Q(B)$. Donc $X \in \mathcal{E}$. Montrons que réciproquement, toute matrice $X = \begin{pmatrix} P(A) & 0 \\ 0 & Q(B) \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$ appartient à $\mathcal{CC}(M)$. Ceci découlera du fait que π_A et π_B sont premiers entre eux. En effet, cette hypothèse implique d'après Bézout que $P - Q$ peut s'écrire sous la forme $P - Q = \alpha\pi_A + \beta\pi_B$ pour certains polynômes $\alpha, \beta \in K[X]$. Posons alors $F := P - \alpha\pi_A = Q + \beta\pi_B$. De $F = P - \alpha\pi_A$ on déduit que $F(A) = P(A)$, et de $F = Q + \beta\pi_B$ on déduit que $F(B) = Q(B)$. Ceci montre que $X = F(M)$. Comme on a déjà vu que $K[M] \subset \mathcal{CC}(M)$, finalement $\mathcal{CC}(M) = \mathcal{E}$.

2

2

6.(d) Nous avons montré en chemin de la preuve de 6.(c) que $\mathcal{E} \subset K[M]$, donc $\mathcal{CC}(M) = \mathcal{E} \subset K[M]$. Comme l'inclusion réciproque est toujours vraie, on a $\mathcal{CC}(M) = K[M]$.

1

Commentaire : on aurait pu donner un argument différent dans la deuxième partie de la preuve de 6.(c), de la manière suivante : on a montré que $\mathcal{CC}(M) \subset \mathcal{E}$, or $\mathcal{E} \simeq K[A] \times K[B]$

comme espace vectoriel. Celui-ci est de dimension $\deg(\pi_A)\deg(\pi_B)$. Comme $\pi_M = \pi_A\pi_B$ (par primalité de π_A et π_B) ce degré vaut $\deg(\pi_M)$. Ainsi $\dim \mathcal{CC}(M) \leq \deg(\pi_M)$ d'où égalité et le résultat par II.2. Cet argument, lui aussi, établit plus ou moins 6.(c) et 6.(d) en même temps.

7.(a) Soit $x \in \mathcal{C}(u)$. Alors $xu = ux$ donc $xn = x(u - \lambda \text{id}_E) = xu - \lambda x = ux - \lambda x = (u - \lambda \text{id}_E)x = nx$ et $x \in \mathcal{C}(n)$. Réciproquement, puisque $n = u - \lambda \text{id}_E$, l'inclusion précédente avec λ remplacé par $-\lambda$ montre que $\mathcal{C}(n) \subset \mathcal{C}(u)$. On a donc égalité.

1 Dire que $y \in \mathcal{CC}(u)$ signifie que $yx = xy$ pour tout $x \in \mathcal{C}(u)$. C'est équivalent à dire que $yx = xy$ donc pour tout $x \in \mathcal{C}(n)$ vu ce qui précède, i.e. $y \in \mathcal{CC}(n)$.

7.(b) En raisonnant par blocs on se ramène au cas d'un seul bloc, on supprime donc les indices i . On a $x \in E$ et $\mathcal{B} = (x, n(x), \dots, n^{d-1}(x))$. Alors l'image par n d'un vecteur de \mathcal{B} est égale au suivant, sauf l'image de $n^{d-1}(x)$ qui est nulle, d'où le fait que la matrice de n dans \mathcal{B} est la matrice compagnon.

1

7.(c) Soit $g \in \mathcal{CC}(n)$, nous voulons montrer que $g \in K[n]$. Pour chaque $i \in \{1, \dots, p\}$ notons $p_i : E \rightarrow E$ le projecteur sur E_i parallèlement à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$. Comme les E_j sont n -stables, on a

- si $x \in E_i : p_i(n(x)) = nx = n(p_i(x))$,
- si $x \in E_j, j \neq i : p_i(n(x)) = 0 = n(p_i(x))$.

2 En résumé $p_i n = n p_i$. Il en découle que $g \in \mathcal{C}(p_i)$. Ceci montre que g laisse stables les E_i .

Soit $q_i : E \rightarrow E$ l'unique application linéaire qui est nulle sur E_j lorsque $j \neq p$, et définie sur les éléments de la base \mathcal{B}_p de E_p par $q_i(n^s(x_p)) = n^s(x_i)$ pour $s = 0, \dots, d_p - 1$. Par combinaison linéaire, on voit alors que $q_i(P(n)(x_p)) = P(n)(x_i)$ pour tout $P \in K[X]$. Utilisant encore le fait que E_i est n -stable, on voit que $q_i n = n q_i$: sur $E_j, j \neq p$, cela se démontre comme ci-dessus pour p_i , et pour tout $y = P(n)(x_p) \in E_p$ on calcule $q_i(n(y)) = q_i(nP(n)(x_p)) = (nP(n))(x_i) = n(q_i(y))$ d'où notre assertion. Comme précédemment on déduit que $g \in \mathcal{C}(q_i)$.

2

Comme g laisse stable E_p , il existe un polynôme $P \in K[X]$ tel que $g(x_p) = P(n)(x_p)$. Utilisant l'égalité $gq_i = q_i g$ appliquée en x_p , on trouve $g(x_i) = g(q_i(x_p)) = q_i(g(x_p)) = q_i(P(n)(x_p)) = P(n)(x_i)$. Puisque les endomorphismes g et $P(n)$ commutent avec toutes les puissances de n et sont linéaires, ceci implique qu'ils coïncident sur tous les éléments $Q(n)(x_i)$ de E_i . Ainsi g et $P(n)$ coïncident sur tous les E_i donc partout. La conclusion est que $g = P(n)$ et nous avons terminé.

2

8. Soit $M \in M_n(K)$. Soit L une extension de scindement du polynôme minimal $\pi_{M,K}$ de M . D'après II.4, on a $\pi_{M,K} = \pi_{M,L}$ donc leurs degrés sont égaux. D'après II.5 on a $\dim_K(\mathcal{CC}_K(M)) = \dim_L(\mathcal{CC}_L(M))$. Il s'ensuit que les deux membres de l'égalité (hypothétique) $\dim_K(\mathcal{CC}_K(M)) = \deg(\pi_{M,K})$, dont la validité équivaut d'après II.2 au théorème du bicommutant, ne changent pas lorsqu'on change K en L . Ceci démontre qu'il nous suffit d'établir le théorème du bicommutant pour M vue dans $M_n(L)$, i.e. (quitte à changer L en K dans la notation) on peut supposer π_M scindé. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes, d_i leurs multiplicités, et $E_i = \ker((M - \lambda_i \text{id}_{K^n})^{d_i})$ les sous-espaces caractéristiques. On a $E = \bigoplus_{i=1}^r E_i$ et dans une base adaptée à cette décomposition, la matrice M est diagonale par blocs de blocs notés M_i . Notons $P_i = (X - \lambda_i)^{d_i}$ qui est le polynôme minimal de M_i . Comme les P_i sont premiers entre eux deux à deux, d'après la question 6 et une récurrence immédiate, il suffit de démontrer le théorème du bicommutant pour chaque M_i . Or le théorème est vrai pour $M_i - \lambda_i \text{id}_{K^{d_i}}$ d'après 7.(c) et il est donc vrai pour M_i d'après 7.(a). Ceci termine la preuve dans le cas général.

1

2

III. Décomposition de Dunford pour une matrice

1. Si M est semi-simple, il existe une extension convenable L de K qui contient les valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ dans laquelle M est semblable à la matrice diagonale D d'éléments diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_2, \dots, \lambda_r, \dots, \lambda_r$ où chaque λ_i est répété un nombre de fois égal à sa multiplicité. Le polynôme minimal de $M = PDP^{-1}$ est égal au polynôme minimal de D car M et D ont même idéaux de polynômes annulateurs, d'où $\pi_M = \pi_D = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_r)$ qui est à facteurs simples dans L . Or nous avons vu en II.4 que le polynôme minimal est le même sur K ou sur L . Il en découle que π_M est à facteurs simples dans K , car un hypothétique facteur multiple dans $K[X]$ fournirait un facteur multiple dans $L[X]$.

Réciproquement supposons que π_M est à facteurs simples sur K . Pour chaque tel facteur irréductible P de π_M , on a donc $\text{pgcd}(P, P') = 1$ où P' est le polynôme dérivé, non nul car nous sommes en caractéristique nulle. On sait que le pgcd ne change pas par extension du corps de base : c'est l'algorithme d'Euclide de calcul du pgcd qui le montre. Il s'ensuit que $\text{pgcd}(P, P') = 1$ même lorsqu'on voit P, P' comme des polynômes à coefficients dans une extension L/K . Sur une extension qui scinde π_M , on obtient que π_M est scindé à racines simples. Par le critère bien connu, ceci implique que M est diagonalisable sur L , donc semi-simple.

2. Les polynômes P et χ_A ont mêmes facteurs irréductibles. Justifions-le. Il est clair que P et π_A ont mêmes facteurs irréductibles, il reste à montrer que π_A et χ_A ont mêmes facteurs irréductibles.

Il est clair que chaque facteur irréductible de π_A divise χ_A , puisque π_A divise χ_A d'après le théorème de Cayley-Hamilton.

Réciproquement montrons que chaque facteur irréductible Q de χ_A divise π_A . Sinon, on a une relation de Bézout $UQ + V\pi_A = 1$. On déduit $U(A)Q(A) = \text{id}$ donc $Q(A)$ est inversible. Or toute racine λ de Q dans une extension de K est valeur propre de A , ce qui montre que l'endomorphisme associé à $Q(A)$ n'est pas injectif et son déterminant est nul, contradiction.

Remarque : si on souhaite, on peut formuler ce qui précède de manière (apparemment) plus quantitative en écrivant $P \mid \pi_A \mid \chi_A \mid P^n$ et (puisque nous sommes en caractéristique nulle) $P = \pi_A / \text{pgcd}(\pi_A, \pi'_A) = \chi_A / \text{pgcd}(\chi_A, \chi'_A)$. (*Je ne sais pas exactement ce qu'attendait le correcteur, et s'il attendait des preuves.*)

3. Supposons que P et P' possèdent un facteur irréductible commun, qui est donc l'un des P_i , disons P_1 quitte à renuméroter. Alors P_1 divise $P' = \sum_{i=1}^k P'_i \prod_{j \neq i} P_j$. Ceci signifie que P_1 divise $P'_1 \prod_{j \neq 1} P_j$. Comme P_1 est premier avec tous les P_j , $j \neq 1$, le lemme d'Euclide implique que P_1 divise P'_1 . Or P_1 est non constant en caractéristique nulle, donc $-\infty < \deg(P'_1) < \deg(P_1)$. La divisibilité $P_1 \mid P'_1$ est donc impossible.

Par contraposée, P et P' sont premiers entre eux et d'après le théorème de Bézout, il existe $R, S \in K[X]$ tels que $RP + SP' = 1$.

4. La relation à établir est K -linéaire et il suffit donc de l'établir sur les monômes $P = X^k$. Or d'après le binôme de Newton on a $(X + Y)^k = X^k + kYX^{k-1} + Y^2 \sum_{i=2}^k \binom{k}{i} Y^{i-2} X^{k-i}$ ce qui est la relation indiquée avec $Q = \sum_{i=2}^k \binom{k}{i} Y^{i-2} X^{k-i}$.

5. Démontrons par récurrence que $P(A_k) \in P(A)^{2^k} K[A]$ pour tout $k \geq 0$. Pour $k = 0$ c'est vrai puisque $P(A_0) = P(A)$. Supposons l'énoncé vrai pour un entier k . Comme toutes les matrices en jeu appartiennent à l'algèbre $K[A]$ qui est commutative, il est légitime d'appliquer

l'identité de la question 4 avec $X = A_k$ et $Y = -P(A_k)S(A_k)$. On trouve :

$$\begin{aligned} P(A_{k+1}) &= P(A_k - P(A_k)S(A_k)) \\ &= P(A_k) - P(A_k)S(A_k)P'(A_k) + (-P(A_k)S(A_k))^2Q(A_k, -P(A_k)S(A_k)) \\ &= P(A_k)(I - S(A_k)P'(A_k)) + (-P(A_k)S(A_k))^2Q(A_k, -P(A_k)S(A_k)). \end{aligned}$$

Or $I - S(A_k)P'(A_k) = R(A_k)P(A_k)$ d'après la question 3. En injectant ceci dans notre calcul, on voit que $P(A_{k+1})$ est un multiple de $P(A_k)^2$. Par récurrence $P(A_k) \in P(A)^{2^k}K[A]$, donc $P(A_{k+1}) \in P(A_k)^2K[A] \subset P(A)^{2^{k+1}}K[A]$. Notons maintenant $m := \max(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, de sorte que P^m est divisible par π_A . Pour tout entier ℓ tel que $2^\ell \geq m$, la matrice $P(A)^{2^\ell}$ est multiple de $P(A)^m$ elle-même multiple de $\pi_A(A) = 0$. Donc $P(A_\ell) = 0$. On peut prendre $\ell = \lceil \log_2(m) \rceil$.

6. La matrice A_ℓ est annulée par le polynôme P qui est à facteurs irréductibles simples. Son polynôme minimal est donc lui aussi à facteurs simples, et d'après la question 1 on voit que A_ℓ est semi-simple. Par ailleurs, on constate par récurrence que $A - A_k$ est nilpotente : elle est nulle pour $k = 0$, et $A - A_{k+1} = (A - A_k) + (A_k - A_{k+1})$ où le premier terme est nilpotent par hypothèse de récurrence et le second terme est nilpotent car multiple de $P(A_k)$. (La somme de deux nilpotents qui commutent est nilpotente!) En particulier, $A - A_\ell$ est nilpotente. Pour conclure, on observe que toutes les matrices en jeu dans ces arguments appartiennent à $K[A]$ et donc commutent entre elles. L'écriture $A = D + N$ avec $D = A_\ell$ et $N = A - A_\ell$ vérifie toutes les propriétés de la décomposition unique en somme de matrices commutantes semi-simple et nilpotente ; elle lui est égale.

IV. Théorie des répliques de Chevalley

1.(a) Notons $E_{i,j}$ la matrice dont le seul terme non nul est un 1 situé en position (i, j) . En d'autres termes, le terme d'incide (r, s) est $\delta_{i,r}\delta_{j,s}$, où δ est le symbole de Kronecker. D'après les définitions, la matrice $E_{i,j} \otimes E_{k,l}$ est la matrice par blocs $(\delta_{i,r}\delta_{j,s}E_{k,l})_{r,s}$, ce qui veut dire que tous ses coefficients sont nuls sauf celui situé en position (k, l) dans le bloc numéro (i, j) , qui vaut 1. Il est alors clair que ces matrices engendrent $\mathcal{M}_{np,mq}(K)$ car pour une matrice A écrite par blocs $A = (A_{i,j})$ avec $A_{i,j} = (a_{i,j,k,l}) \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$, compte tenu de ce qui précède on a $A = \sum_{i,j,k,l} a_{i,j,k,l}E_{i,j} \otimes E_{k,l}$. Donc $\mathcal{M}_{n,m}(K) \otimes \mathcal{M}_{p,q}(K) = \mathcal{M}_{np,mq}(K)$.

1.(b) Soient $A \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$. Comme $(e_{i,j})$ et $(f_{k,l})$ sont des bases respectivement, on peut trouver des écritures $A = \sum_{i,j} a_{i,j}e_{i,j}$ et $B = \sum_{k,l} b_{k,l}f_{k,l}$. Comme l'opérateur \otimes est bilinéaire (admis par l'énoncé), on obtient :

$$A \otimes B = \sum_{i,j,k,l} a_{i,j}b_{k,l}e_{i,j} \otimes f_{k,l}.$$

On voit que la famille $(e_{i,j} \otimes f_{k,l})_{i,j,k,l}$ engendre l'espace vectoriel engendré par les matrices $A \otimes B$, qui est d'après 1.(a) égal à $\mathcal{M}_{np,mq}(K)$. On obtient une famille génératrice à $npmq$ éléments dans un espace vectoriel de dimension $npmq$, c'est donc une base.

1.(c) À strictement parler, l'opérateur \otimes n'a été défini que pour des espaces de matrices. Or E^* et F^* ne sont pas des espaces de matrices, mais des espaces de formes linéaires sur de tels espaces. (À mon sens, il s'agit là d'une faiblesse importante du sujet.) Pour voir E^* et F^* comme des espaces de matrices nous allons utiliser l'isomorphisme $\mathcal{M}_{m,n}(K) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{n,m}(K)^*$, $A \mapsto f_A$ établi dans la deuxième question préliminaire P2 pour identifier E^* avec $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ et F^* avec $\mathcal{M}_{q,p}(K)$. On dispose alors d'isomorphismes :

$$E^* \otimes F^* \xrightarrow{\text{P2}} \mathcal{M}_{m,n}(K) \otimes \mathcal{M}_{q,p}(K) \xrightarrow{1.(a)} \mathcal{M}_{mq,np}(K) \xrightarrow{\text{P2}} \mathcal{M}_{np,mq}(K)^* = (E \otimes F)^*.$$

C'est l'isomorphisme recherché.

2.(a) Les coefficients diagonaux de $A \otimes B$ sont les coefficients situés sur la diagonale d'un bloc diagonal $a_{i,j}B$. Ce sont donc les coefficients $a_{i,i}b_{k,k}$ avec $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq k \leq m$. On obtient :

$$\boxed{1} \quad \text{Tr}(A \otimes B) = \sum_{i,k} a_{i,i}b_{k,k} = \left(\sum_i a_{i,i} \right) \left(\sum_k b_{k,k} \right) = \text{Tr}(A) \text{Tr}(B).$$

2.(b) Notons \overline{K} une clôture algébrique de K . Nous pouvons plonger tous les espaces de matrices dans les espaces analogues sur \overline{K} , i.e. $M_n(\overline{K})$ etc. Alors les polynômes caractéristiques de A et B sont scindés, si bien que ces matrices sont trigonalisables. Notons $T \in M_n(\overline{K})$ et $U \in M_m(\overline{K})$ les formes triangulaires supérieures et P, Q des matrices de passage : $PAP^{-1} = T$ et $QBQ^{-1} = U$. Posons $R = \mathbf{I}_n \otimes Q$, par calcul par blocs on voit que

$$R(A \otimes B)R^{-1} = (a_{i,j}QBQ^{-1}) = (a_{i,j}U).$$

Posons $S = P \otimes \mathbf{I}_m$. Par calcul par blocs encore, on voit que :

$$\boxed{2} \quad SR(A \otimes B)R^{-1}S^{-1} = (t_{i,j}U) = T \otimes U.$$

[Détail : notons $P = (p_{i,j})$, $P^{-1} = (\tilde{p}_{i,j})$. On multiplie d'abord à gauche par S : le bloc d'indice (i, j) de $SR(A \otimes B)R^{-1}$ est égal à $\sum_k p_{i,k}a_{k,j}U$. On multiplie ensuite à droite par P^{-1} : le bloc d'indice (i, j) de $SR(A \otimes B)R^{-1}S^{-1}$ est égal à $\sum_l \sum_k p_{i,k}a_{k,l}U\tilde{p}_{l,j}\mathbf{I}_m = \sum_{l,k} p_{i,k}a_{k,l}\tilde{p}_{l,j}U = t_{i,j}U$.] Cette matrice est triangulaire supérieure, avec pour coefficients diagonaux les $t_{i,i}u_{k,k}$. Comme le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des déterminants des blocs, on obtient :

$$\boxed{2} \quad \det(A \otimes B) = \det(SR(A \otimes B)R^{-1}S^{-1}) = \det(t_{i,j}U) \\ = \prod_{i=1}^n \det(t_{i,i}U) = \prod_{i=1}^n t_{i,i}^m \det(U) = \det(T)^m \det(U)^n = \det(A)^m \det(B)^n.$$

Commentaire : dans la suite, il faut bien comprendre quel est le sens d'une expression comme $X_1 \otimes \cdots \otimes X_r \otimes Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_s$. On doit voir chaque X_i comme un élément de $K^n = \mathcal{M}_{n,1}(K)$ et chaque Y_j comme un élément de $(K^n)^ = \mathcal{M}_{1,n}(K)$, comme indiqué dans les notations situées en prologue du problème. La définition de $A \otimes B$ donnée précédemment s'applique alors. On a admis que \otimes était associatif, de sorte que la notation $X_1 \otimes \cdots \otimes X_r \otimes Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_s$ sans parenthèses n'est pas ambiguë.*

3. D'après la question 1.(a) on a :

$$\boxed{1} \quad \mathcal{N}_{1,1} = K^n \otimes (K^n)^* = \mathcal{M}_{n,1}(K) \otimes \mathcal{M}_{1,n}(K) = \mathcal{M}_{n,n}(K) = \mathcal{M}_n(K).$$

De plus, on a vu en 1.(b) qu'une base de cet espace est donnée par les $E_i \otimes F_j$, avec $E_i = {}^t(0 \cdots 1 \cdots 0)$ (le 1 est en position i) et $F_j = (0 \cdots 1 \cdots 0)$ (le 1 est en position j), qui dans $\mathcal{M}_n(K)$ correspond à la matrice $E_{i,j}$. Soit maintenant $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et $M \in \mathcal{M}_n(K)$. Pour montrer que $A_{1,1} \cdot M = \text{ad}_A(M)$, il suffit de le montrer pour les matrices de base $M = E_i \otimes F_j$. Dans ce cas on a :

$\boxed{2}$

$$A_{1,1} \cdot M = A_{1,1} \cdot (E_i \otimes F_j) = AE_i \otimes F_j - E_i \otimes F_j A.$$

Notons L_i , resp. C_j , la i -ème colonne, resp. la j -ème colonne, de A . Alors $AE_i = C_i$ donc $AE_i \otimes F_j = C_i \otimes F_j$ est la matrice (n, n) dont la seule colonne non nulle est la j -ème, égale à C_i . Ceci est exactement la matrice $AE_{i,j}$. De même $F_j A = L_j$ et $E_i \otimes F_j A = E_i \otimes L_j$ est la matrice (n, n) dont la seule ligne non nulle est la i -ème, égale à L_j . C'est la matrice $E_{i,j} A$. Il s'ensuit que

$$A_{1,1} \cdot (E_i \otimes F_j) = AE_{i,j} - E_{i,j} A = \text{ad}_A(M).$$

4. Compte tenu des égalités $K^n = \mathcal{M}_{n,1}(K)$ et $(K^n)^* = \mathcal{M}_{1,n}(K)$ ainsi que de l'isomorphisme canonique $\mathcal{M}_{m,n}(K) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{n,m}(K)^*$ fourni par la trace dans la question P2, tous les espaces qui apparaissent ci-dessous sont des espaces de matrices. On peut donc utiliser les résultats de 1.(a) et 1.(c), étendus par une récurrence immédiate à un nombre fini arbitraire d'espaces vectoriels. On trouve en particulier

$$(K^n)^{\otimes r} = (\mathcal{M}_{n,1}(K))^{\otimes r} = \mathcal{M}_{n^r,1}(K) = K^{n^r}$$

et

$$((K^n)^*)^{\otimes s} = (\mathcal{M}_{1,n}(K))^{\otimes s} = \mathcal{M}_{1,n^s}(K) = (K^{n^s})^*.$$

On en déduit les isomorphismes canoniques :

$$\mathcal{N}_{r,s}^* = ((K^n)^{\otimes r} \otimes ((K^n)^*)^{\otimes s})^* = ((K^n)^{\otimes r})^* \otimes (((K^n)^*)^{\otimes s})^* = (K^{n^r})^* \otimes K^{n^s} = \mathcal{N}_{s,r},$$

où pour finir on a utilisé la bidualité en dimension finie $(K^{n^s})^{**} = K^{n^s}$.

5. Il est clair que $\phi_{P,r,s} \circ \phi_{P^{-1},r,s} = \phi_{P^{-1},r,s} \circ \phi_{P,r,s} = \text{id}$ donc $\phi_{P,r,s}$ est un isomorphisme d'inverse $\phi_{P^{-1},r,s}$.

6. Pour alléger, nous noterons ϕ_P au lieu de $\phi_{P,r,s}$ l'automorphisme de la question précédente. Si A et B sont semblables, il existe une matrice inversible P telle que $B = PAP^{-1}$. Pour un tenseur $n = X_1 \otimes \dots \otimes X_r \otimes Y_1 \otimes \dots \otimes Y_s$ dans $\mathcal{N}_{r,s}$, calculons l'effet de $\phi_P A_{r,s} \phi_{P^{-1}}$ en regardant successivement l'action des trois endomorphismes $\phi_{P^{-1}}$ puis $A_{r,s}$ puis ϕ_P :

$$\begin{aligned} n &\mapsto P^{-1}X_1 \otimes \dots \otimes P^{-1}X_r \otimes Y_1 P \otimes \dots \otimes Y_s P \\ &\mapsto \sum_{i=1}^r P^{-1}X_1 \otimes \dots \otimes AP^{-1}X_i \otimes \dots \otimes P^{-1}X_r \otimes Y_1 P \otimes \dots \otimes Y_s P \\ &\quad - \sum_{j=1}^s P^{-1}X_1 \otimes \dots \otimes P^{-1}X_r \otimes Y_1 P \otimes \dots \otimes Y_j P A \otimes \dots \otimes Y_s P \\ &\mapsto \sum_{i=1}^r X_1 \otimes \dots \otimes P A P^{-1} X_i \otimes \dots \otimes X_r \otimes Y_1 \otimes \dots \otimes Y_s - \sum_{j=1}^s X_1 \otimes \dots \otimes X_r \otimes Y_1 \otimes \dots \otimes Y_j P A P^{-1} \otimes \dots \otimes Y_s. \end{aligned}$$

On constate que $\phi_P A_{r,s} \phi_{P^{-1}} = (P A P^{-1})_{r,s} = B_{r,s}$. Ceci montre que $A_{r,s}$ et $B_{r,s}$ sont des endomorphismes semblables dans $\mathcal{L}(\mathcal{N}_{r,s})$.

7.(a) Notons (x_1, \dots, x_n) une base ordonnée de vecteurs propres pour A , telle que $Ax_i = \lambda_i x_i$. Ici x_i est un vecteur colonne. La matrice transposée ${}^t A$ est elle aussi diagonalisable avec les mêmes valeurs propres que A . Notons (z_1, \dots, z_n) une base ordonnée de vecteurs propres pour ${}^t A$, avec ${}^t A z_i = \lambda_i z_i$, et posons $y_i = {}^t z_i$ qui est un vecteur ligne. En transposant on trouve

donc $y_i A = \lambda y_i$. D'après la question 1.(b), dont le résultat est étendu par une récurrence immédiate à un nombre fini arbitraire d'espaces vectoriels, la famille formée par les vecteurs

$$\boxed{1} \quad n_{\underline{i}, \underline{j}} := x_{i_1} \otimes \cdots \otimes x_{i_r} \otimes y_{j_1} \otimes \cdots \otimes y_{j_s}$$

avec $1 \leq i_1, \dots, i_r \leq n$ et $1 \leq j_1, \dots, j_s \leq n$, est une base de $\mathcal{N}_{r,s}$. De plus, on a

$$x_1 \otimes \cdots \otimes A x_i \otimes \cdots \otimes x_r = \lambda_i x_1 \otimes \cdots \otimes x_r \quad \text{et} \quad y_1 \otimes \cdots \otimes y_j A \otimes \cdots \otimes y_s = \lambda_j y_1 \otimes \cdots \otimes y_s$$

dont on déduit immédiatement, par somme, que le vecteur $n_{\underline{i}, \underline{j}}$ introduit ci-dessus est un vecteur propre pour $A_{r,s}$ relatif à la valeur propre $(\sum_{p=1}^r \lambda_{i_p}) - (\sum_{q=1}^s \lambda_{j_q})$. Ainsi $A_{r,s}$ est diagonalisable avec les valeurs propres indiquées.

$\boxed{1}$ 7.(b) Soit $N \geq 1$ tel que $A^N = 0$. Pour montrer que $A_{r,s}$ est nilpotente, il suffit de trouver M tel que $(A_{r,s})^M$ annule tous les vecteurs de la forme $n = X_1 \otimes \cdots \otimes X_r \otimes Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_s$ puisque ceux-ci engendrent $\mathcal{N}_{r,s}$. On observe que $A_{r,s} \cdot n$ est somme de vecteurs de la forme $X_1 \otimes \cdots \otimes A X_i \otimes \cdots \otimes X_r$ ou $Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_j A \otimes \cdots \otimes Y_s$, où la matrice A apparaît une fois. Par récurrence, $(A_{r,s})^k \cdot n$ est somme de vecteurs de la forme $A^{i_1} X_1 \otimes \cdots \otimes A^{i_r} X_r$ et $A^{j_1} Y_1 \otimes \cdots \otimes A^{j_s} Y_s$ avec $\sum_{p=1}^r i_p = \sum_{j=1}^s j_j = k$. Si on choisit $k \geq M := \max(r, s)(N - 1) + 1$, alors pour tous uplets $\underline{i} = (i_1, \dots, i_r)$ et $\underline{j} = (j_1, \dots, j_s)$ il existe deux indices α, β tels que $i_\alpha = j_\beta \geq N$. (Car par contraposée, si $i_p \leq N - 1$ pour tout p alors $k = \sum_p i_p \leq r(N - 1) < M$.) Alors $A^{i_\alpha} X_\alpha = A^{j_\beta} Y_\beta = 0$ ce qui annule $A^{i_1} X_1 \otimes \cdots \otimes A^{i_r} X_r$ et $A^{j_1} Y_1 \otimes \cdots \otimes A^{j_s} Y_s$. Il s'ensuit que $(A_{r,s})^M \cdot n$ est une somme de termes nuls, donc est nul, et ceci pour tout n . Comme M ne dépend pas de n on a bien $(A_{r,s})^M = 0$.

$\boxed{1}$ 8.(a) Soient $r, s \geq 0$ sont entiers et $n \in \mathcal{N}_{r,s}$ tel que $A_{r,s} \cdot n = 0$. Comme A' une réplique de A , alors $A'_{r,s} \cdot n = 0$. Comme de plus A'' est une réplique de A' , alors $A''_{r,s} \cdot n = 0$. Ceci démontre que A'' est une réplique de A .

8.(b) À strictement parler, l'espace $\mathcal{N}_{r,s}(E)$ n'a été défini que pour l'espace vectoriel standard $E = K^n$. Pour donner sens à $(\mathcal{N}_{r,s})_{r',s'}$ comme dans phrase de l'énoncé qui suit immédiatement la question IV.6, et donner sens à l'expression « $A'_{r,s}$ est une réplique de $A_{r,s}$ », il faut considérer $\mathcal{N}_{r',s'}(\mathcal{N}_{r,s})$. Or $E = \mathcal{N}_{r,s}$ est un espace vectoriel abstrait, isomorphe canoniquement à $K^{n^r} \oplus (K^{n^s})^*$ comme nous l'avons vu en IV.4 mais pas isomorphe canoniquement à l'espace standard $K^{n^r+n^s}$. (À mon sens, il s'agit là d'une nouvelle faiblesse du sujet.) Éclaircissons donc la définition : l'espace $(\mathcal{N}_{r,s})_{r',s'} := \mathcal{N}_{r',s'}(\mathcal{N}_{r,s})$ est l'espace vectoriel engendré (dans un certain gros espace de matrices qu'il n'est ni agréable ni utile d'écrire) par les vecteurs de la forme $X_1 \otimes \cdots \otimes X_{r'} \otimes Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_{s'}$ où (X_i) est une famille de vecteurs de $\mathcal{N}_{r,s} = K^{n^r} \oplus (K^{n^s})^*$ et (Y_j) est une famille de vecteurs de $(\mathcal{N}_{r,s})^* = \mathcal{N}_{s,r} = K^{n^s} \oplus (K^{n^r})^*$. (Dans la dernière phrase, nous avons écrit les isomorphismes canoniques $\mathcal{N}_{r,s} = K^{n^r} \oplus (K^{n^s})^*$ comme des égalités, et utilisé la question 4.)

$\boxed{1}$ Supposons que A' est une réplique de A . Pour montrer que $A'_{r,s}$ est une réplique de $A_{r,s}$, nous devons vérifier que pour tout couple d'entiers $r', s' \geq 0$, tout $n \in (\mathcal{N}_{r,s})_{r',s'}$ annulé par $(A_{r,s})_{r',s'}$ est annulé par $(A'_{r,s})_{r',s'}$. Or l'énoncé nous invite à admettre que $(\mathcal{N}_{r,s})_{r',s'} = \mathcal{N}_{rr'+ss',rs'+sr'}$ canoniquement et que $(A'_{r,s})_{r',s'} = A_{rr'+ss',rs'+sr'}$ dans cette identification. On est donc amené à vérifier que tout vecteur $n \in \mathcal{N}_{rr'+ss',rs'+sr'}$ annulé par $A_{rr'+ss',rs'+sr'}$ est annulé par $A'_{rr'+ss',rs'+sr'}$, ce qui découle de la définition d'une réplique appliquée avec $r := rr' + ss'$ et $s := rs' + sr'$.

9.(a) Si A' est une réplique de A , alors en particulier tout vecteur annulé par $A_{1,1}$ est annulé par $A'_{1,1}$. Or d'après la question 3, $A_{1,1} = \text{ad}_A : M_n(K) \rightarrow M_n(K)$, $M \mapsto AM - MA$. La

propriété signifie donc que toute matrice commutant avec A commute avec A' , c'est-à-dire $\mathcal{C}(A) \subset \mathcal{C}(A')$. En prenant les commutants, on en déduit que $\mathcal{C}\mathcal{C}(A') \subset \mathcal{C}\mathcal{C}(A)$. D'après le théorème du bicommutant on a $\mathcal{C}\mathcal{C}(A) = K[A]$. L'inclusion montre donc que $A' \in K[A]$, i.e. A' est un polynôme en A . Écrivons $A' = P(A)$ où $P \in K[X]$ est un polynôme que l'on peut écrire $P(X) = \alpha + XQ(X)$ avec $\alpha \in K$.

Si A n'est pas inversible, il existe $x \in K^n$ non nul tel que $Ax = 0$. Comme A' est une réplique, on a aussi $A'x = 0$. En évaluant $A' = P(A) = \alpha\mathbf{I}_n + AQ(A)$ en x on trouve $\alpha x = 0$, donc $\alpha = 0$. Ainsi A' est un polynôme en A sans terme constant.

Si A est inversible, on sait que l'on peut écrire A^{-1} comme un polynôme en A (par exemple en utilisant le théorème de Cayley Hamilton pour A), disons $A^{-1} = R(A)$. Alors $A' = \alpha\mathbf{I}_n + AQ(A) = \alpha AA^{-1} + AQ(A) = A(\alpha R(A) + Q(A))$ qui est un polynôme en A sans terme constant.

9.(b) Si A' est une réplique de A , alors d'après 8.(b) pour tous r, s l'endomorphisme $A'_{r,s}$ est une réplique de $A_{r,s}$. D'après 9.(a) ceci implique que $A'_{r,s}$ est un polynôme en $A_{r,s}$ sans terme constant. Réciproquement supposons que pour tous r, s , $A'_{r,s}$ est un polynôme en $A_{r,s}$ sans terme constant, ce que l'on peut écrire $A'_{r,s} = A_{r,s}P(A_{r,s})$ pour un certain polynôme P . L'absence de terme constant montre que tout vecteur du noyau de $A_{r,s}$ est dans le noyau de $A'_{r,s}$. La définition d'une réplique de A est donc satisfaite par A' .

10.(a) Fixons $r, s \geq 0$. La question 7.(a) montre que, sur une extension de corps L/K choisie pour que D soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(L)$, $D_{r,s}$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(L)$. Donc $D_{r,s}$ est semi-simple dans $\mathcal{M}_n(K)$. La question 7.(b) montre que $N_{r,s}$ est nilpotente. Puisque D et N commutent, la propriété admise juste avant la question 9.(a) montre que $[D_{r,s}, N_{r,s}] = [D, N]_{r,s} = 0$. Pour finir il nous reste à observer que $A_{r,s}$ est linéaire en A , c'est-à-dire, que l'application $\mathcal{M}_n(K) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{N}_{r,s})$, $A \mapsto A_{r,s}$ est linéaire. Il en découle que $A_{r,s} = (D + N)_{r,s} = D_{r,s} + N_{r,s}$. En résumé les endomorphismes $D_{r,s}$ et $N_{r,s}$ vérifient toutes les propriétés de la décomposition de Jordan-Chevalley-Dunford de $A_{r,s}$, dont elles sont les parties semi-simple et nilpotente.

10.(b) Nous avons besoin de montrer en préalable que dans la décomposition $A = D + N$, les matrices D et N sont des polynômes en A sans terme constant. Il suffit de le démontrer pour D , car c'est alors clair pour $N = A - D$. Or la construction de D dans la partie III, comme limite d'une suite stationnaire dont tous les termes sont des polynômes en A , montre que D est un polynôme en A . On termine comme dans 9.(a) :

1) Si A n'est pas inversible. Sur l'espace caractéristique de A relatif à la valeur propre 0, l'endomorphisme associé à D est nul et en particulier $\ker(A) \subset \ker(D)$. Le raisonnement de 9.(a) montre que D est un polynôme en A sans terme constant.

2) Si A est inversible. Le raisonnement de 9.(a) montre que D est un polynôme en A sans terme constant.

Passons à la question proprement dite. Traitons le cas de D , le cas de N étant entièrement similaire. D'après 9.(b) il suffit de montrer que pour tous $r, s \geq 0$, $D_{r,s}$ est un polynôme en A sans terme constant. Or d'après 10.(a), $D_{r,s}$ est la composante semi-simple de $A_{r,s}$. D'après le fait préalable que nous avons établi, appliqué pour $A = A_{r,s}$, $D_{r,s}$ est un polynôme en $A_{r,s}$ sans terme constant. Ceci conclut.

11. ...