

Planche Agrégation

2017

29 janvier 2018

Exercice 9 (X-ENS Analyse 2, Ex.1.29 p.48)

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de $[0, 1]$. Pour $0 \leq a \leq b \leq 1$ on pose

$$X_n(a, b) = \text{Card}\{k \in [1, n] \mid a \leq u_k \leq b\}.$$

Prouver l'équivalence entre les trois propositions suivantes.

(i) $\frac{X_n(a, b)}{n} \rightarrow (b - a)$ quand $n \rightarrow \infty$;

(ii) $\forall f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(u_k) = \int_0^1 f(t) dt;$$

(iii) $\forall p \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2i\pi p u_k} = 0.$$

Exercice 10 (X-ENS Analyse 2, Ex.1.30 p.51)

Soit $\theta > 0$. Montrer que la suite $(n\theta)_{n \in \mathbb{N}}$ est équi-répartie si et seulement si $\theta \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 11 (X-ENS Analyse 2, Ex.2.29 p.159)

Soit $H : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue telle que pour tout $x \in [0, 1]$, $H(x, x) = 0$. Pour toute fonction $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ bornée, on pose

$$T\varphi : t \in [0, 1] \mapsto T\varphi(t) = \inf_{s \in [0, 1]} (\varphi(s) + H(t, s)).$$

1. Montrer que l'application $T\varphi$ est bien définie de $[0, 1]$ sur $\mathbb{R}$ et qu'elle définit une fonction continue.
2. On définit alors l'application T sur l'espace $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs réelles. Déterminer les points fixes de T .
3. Montrer que l'application T est continue sur $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ pour la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$.
4. Soit $\varphi \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. Montrer que $(T^n \varphi)_{n \geq 0}$ converge simplement vers un point fixe de T . Montrer qu'il s'agit en fait d'une convergence uniforme.

Exercice 12 On définit le sous espace de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$T := \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \text{Tr}(M) = 0\}$$

et on s'intéresse à l'application

$$\varphi : SL_2(\mathbb{R}) \ni A \mapsto (\varphi_A : X \in T \mapsto AXA^{-1}) \in \text{Aut}(T)$$

1. Montrer que $SL_2(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et déterminer son plan tangent en l'identité.

2. Montrer que φ définit une action de groupe et étudier le comportement du déterminant par cette action. En remarquant que le déterminant définit une forme quadratique sur T , en déduire que à une identification près on a

$$\varphi(SL_2(\mathbb{R})) \subset SO_0(2, 1).$$

3. Montrer que φ est différentiable et montrer que la différentielle en l'identité est un isomorphisme de $T_{I_2}SL_2(\mathbb{R})$ sur $T_{I_3}SO_0(2, 1)$.

4. En appliquant le théorème d'inversion locale pour les sous-variétés et en utilisant un argument de groupes topologiques, montrer que φ est surjective de $SL_2(\mathbb{R})$ sur $SO_0(2, 1)$.

5. En déduire que $PSL_2(\mathbb{R})$ est isomorphe à $SO_0(2, 1)$.