Actions de groupes

Notions fondamentales : action d'un groupe G sur un ensemble X, action libre, fidèle, transitive, stabilisateur G_x et orbite $\omega(x)$ d'un point $x \in X$, bijection $G/G_x \xrightarrow{\sim} \omega(x)$, partition en orbites, équation aux classes.

Références suggérées :

- cours : Perrin (*Cours d'algèbre*, chap. I), Calais (*Éléments de théorie des groupes*, chap. V), Combes (*Algèbre et géométrie*, chap. 2), Ulmer (*Théorie des groupes*, chap. 4).
- exercices : Delcourt, *Théorie des groupes*, Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS, algèbre 1.*

Exercice 1 (*Lemme de Cauchy*) [Delcourt ex. 3.2.15, Ulmer th. 7.6, FGN1 ex. 2.10]
Soit p un nombre premier. Le lemme de Cauchy affirme que tout groupe fini d'ordre divisible par p contient un élément d'ordre p. En voici une démonstration due à James McKay en 1959.

1. Soit H un p-groupe fini agissant sur un ensemble fini X. On note $X^H = \{x \in X\,;\forall g \in G,\ gx = x\}$ l'ensemble des points fixes de X sous H. Démontrer que $|X^H| \equiv |X| \mod p$.
2. Soit G un groupe fini d'ordre divisible par p. Démontrez que le groupe H engendré dans $\mathfrak{S}_p$ par le p-cycle $c = (1, 2, \dots, p)$ agit sur $X = \{(g_1, \dots, g_p) \in G^p\,;\, g_1 \cdots g_p = e\}$ par permutation des coordonnées. Déduisez le lemme de Cauchy de la partition en orbites de cette action.

Exercice 2 (*Théorèmes de Sylow*) [Delcourt, ex. 3.2.3]
Soit p un nombre premier et G un groupe fini d'ordre $p^k m$, avec m premier à p. On appelle *p-Sylow de G* tout sous-groupe d'ordre p^k. Nous voulons démontrer :

(S1) Il existe des p-Sylow.

(S2) Les p-Sylow de G sont conjugués. Tout p-sous-groupe de G est contenu dans un p-Sylow.

(S3) Soit c_p le nombre de p-Sylow de G. Alors $c_p \equiv 1 \mod (p)$ et $c_p | m$.

1. On note X l'ensemble des parties à p^k éléments de G. Montrez que le cardinal de X est premier à p.
   Indications : soit i un entier tel que $0 \leqslant i < p^k$. On note $i = p^\ell j$ où $\ell := v_p(i)$ est la valuation p-adique de i, c'est-à-dire la multiplicité du facteur p. Démontrez que $v_p(p^k m - i) = v_p(p^k - i) = \ell$.
2. Montrez que dans l'action naturelle de G sur X, il existe une orbite A de cardinal premier à p.
   Indications : étudiez la partition en orbites de X.
3. Soit $X \in A$. Montrez que le stabilisateur G_X est un p-Sylow de G.
   Indications : observez que p^k divise $|G_x|$, puis que G_X agit librement sur X donc $|G_x| \leqslant p^k$.
4. Soit $S \subset G$ un p-Sylow et $H \subset G$ un p-sous-groupe. On fait agir H par translation à gauche sur G/S. Démontrez qu'il existe $x \in G$ tel que l'orbite de xS est de cardinal 1, puis que $H \subset xSx^{-1}$.
   Indications : étudiez la partition en orbites de G/S.
5. Déduisez-en que les p-Sylow sont conjugués.
6. Démontrez qu'il existe un p-Sylow distingué ssi il existe un unique p-Sylow.
7. Soit X' l'ensemble des p-Sylow de G et $c_p = |X'|$. En faisant agir S sur X' par conjugaison, montrez que $c_p \equiv 1 \mod p$. En faisant agir G sur X' par conjugaison, montrez que $c_p | m$.
   Indications : si $T \in X'$ a une orbite réduite à un point, démontrez que S et T sont deux p-Sylow du normalisateur $N_T := \{g \in G, gTg^{-1} \subset T\}$. *En appliquant la question précédente, montrez que $S = T$.*

Exercice 3 (*Centre d'un p-groupe*) [Delcourt, ex. 3.1.15, Ulmer prop. 7.8]

1. Soit G un groupe de cardinal p^k avec $k \geqslant 1$. En regardant la partition en orbites pour l'action de G sur lui-même par conjugaison, démontrez que le centre de G est non trivial.
2. Déduisez-en que pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$ il existe dans G un sous-groupe de cardinal p^i.

Exercice 4 (*Théorème de Frobenius*) [Delcourt, ex. 3.2.12]
Soit G un groupe fini et p le plus petit des nombres premiers qui divisent $|G|$. On veut montrer que tout sous-groupe H d'indice p dans G est distingué.

1. On fait agir G sur G/H par translations à gauche et on note N le noyau du morphisme d'action $G \to \mathfrak{S}_{G/H}$. Démontrez que l'indice $[G : N]$ divise $p!$.
2. En utilisant la définition de p, déduisez-en que $[G : N]$ vaut 1 ou p.
3. Démontrez que $N \subset H$. Déduisez-en que $[G : N] = p$ puis que $N = H$.

Exercice 5 (*Traces modulo p*) [FGN1, ex. 7.12]
Dans l'exercice 1, on a fait agir un p-cycle par permutation sur les coordonnées d'un p-uplet. La même action mène à un résultat amusant sur le lien entre traces de matrices et morphisme de Frobenius.

1. Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{Z})$. Démontrez que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.
   A-t-on $\mathrm{Tr}(A_{\sigma(1)} \cdots A_{\sigma(n)}) = \mathrm{Tr}(A_1 \cdots A_n)$ pour tout n-uplet de matrices $(A_1, \dots, A_n)$?
2. Si $X = \{A, B\}^p$, démontrez l'identité $(A + B)^p = \sum_{(A_1,\dots,A_p)\in X} A_1 \cdots A_p$.
3. Soit G le sous-groupe de $\mathfrak{S}_p$ engendré par le p-cycle $c = (1, 2, \dots, p)$. On fait agir G sur X par $c \cdot \sigma(A_1, \dots, A_p) = (A_2, \dots, A_p, A_1)$. En regardant les orbites de cette action, montrez que
$$\mathrm{Tr}\,(A + B)^p \equiv \mathrm{Tr}\ A^p + \mathrm{Tr}\ B^p \mod p.$$

Exercice 6 (*Premier théorème de Sylow*) [Serre, Représentations linéaires des groupes finis, page 81]
Soit p un nombre premier et G un groupe fini d'ordre $p^n m$, avec m premier à p. On veut démontrer l'existence d'un p-Sylow (premier théorème de Sylow S1) par récurrence sur le cardinal $|G|$. On note C le centre de G.

1. On suppose que $|C| \equiv 0 \mod p$. Démontrez qu'il existe dans C un élément d'ordre p (lemme de Cauchy dans le cas abélien) et déduisez-en par récurrence l'existence d'un p-Sylow de G.
   Indications : choisir $x \neq 0$ dans C, et discuter selon que l'ordre de x est ou non premier avec p.
2. On suppose que $|C| \not\equiv 0 \mod p$. En faisant agir G sur $G \setminus C$ par conjugaison, démontrez qu'il existe un sous-groupe H d'indice premier à p, et déduisez-en par récurrence l'existence d'un p-Sylow de G.
   Indications : regardez la partition de $G \setminus C$ en orbites.

Exercice 7 On note $\mathrm{Hom}(G_1, G_2)$ l'ensemble des morphismes de groupes entre deux groupes G_1 et G_2.

1. Démontrez que pour tout groupe G, l'application $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G) \to G$, $f \mapsto f(1)$ est une bijection.
2. Pour tout entier $d \geqslant 0$, démontrez qu'on a de même une bijection
$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, G) \to \{\text{éléments } g \in G \text{ tels que } g^d = 1\}.$$
   Décrivez les cas particuliers $d = 0$ et $d = 1$.

Exercice 8 Soient G un groupe agissant sur un ensemble X. On considère un sous-groupe $H \subset G$ et une partie $Y \subset X$ tels que H *stabilise* Y, c'est-à-dire que $hy \in Y$ pour tous $h \in H$ et $y \in Y$. Démontrez qu'il y a alors une action induite de H sur Y.
Indications : la vraie question est de faire la liste de ce qu'on doit vérifier !