Corrigé du problème de Mathématiques générales 2018

Matthieu Romagny, 11 septembre 2018

I. Exercices préliminaires

1. Si $a = 1$, alors la décomposition de Dunford est $A = S + N$ où $S = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \mathrm{I}_2$ et $N = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$
$\boxed{1}$ car il est clair que S est diagonalisable, N nilpotente et qu'elles commutent. Si $a \neq 1$, alors comme A est triangulaire on voit qu'elle possède deux valeurs propres distinctes 1 et a. Elle est donc diagonalisable, autrement dit la décomposition de Dunford est $A = S + N$ avec $S = A$ et
$\boxed{1}$ $N = 0$. [1]

2. Soit $K \geqslant 0$ un entier. Comme l'application de conjugaison $c_P : \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, $A \mapsto$
$\boxed{1}$ PAP^{-1} est un automorphisme de $\mathbb{C}$-algèbre, on a :

$$\sum_{k=0}^{K} \frac{1}{k!}(PAP^{-1})^k = \sum_{k=0}^{K} \frac{1}{k!} PA^kP^{-1} = P\left(\sum_{k=0}^{K} \frac{1}{k!}A^k\right)P^{-1}.$$

$\boxed{1}$ En faisant tendre K vers l'infini, le membre de gauche tend vers $\exp(PAP^{-1})$. Dans le membre de droite, le contenu de la parenthèse tend vers $\exp(A)$ et comme nous sommes en dimension
$\boxed{1}$ finie, l'application linéaire c_P est continue, donc le membre de droite tend vers $P\exp(A)P^{-1}$. La conclusion demandée en découle.

3. Notons e l'application d'évaluation indiquée et k le cardinal de $\{a_1, \dots, a_n\}$. Quitte à réordonner $\{1, \dots, n\}$, on peut supposer que $a_1, \dots, a_k$ sont distincts. Par division euclidienne
$\boxed{1}$ par $(X - a_1) \dots (X - a_k)$, on voit que le noyau de e est composé des polynômes de la forme $P = (X - a_1) \dots (X - a_k)Q$ avec $Q \in \mathbb{C}_{n-1-k}[X]$ (ici, on convient que $\mathbb{C}_{-1}[X] = 0$). En particulier, si les a_i sont deux à deux distincts i.e. si $k = n$, alors $\ker(e) = 0$ donc e est injective.
$\boxed{1}$ Comme sa source et son but sont de même dimension n, il en découle que e est bijective, donc tout uplet $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^n$ est de la forme $(P(a_1), \dots, P(a_n))$ pour un unique $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$.

4. Posons $M := \rho(1)$. Comme ρ est un morphisme de groupes, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a $\rho(k) =$
$\boxed{1}$ $\rho(1)^k = M^k$ ce qui répond à la première question. Deux représentations $\rho : \mathbb{Z} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $\rho : \mathbb{Z} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ déterminées par les matrices $M = \rho(1)$ et $M' = \rho'(1)$ sont équivalentes s'il existe un automorphisme $\mathbb{C}$-linéaire $\alpha : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ tel que $\alpha(\rho(k)v) = \rho'(k)(\alpha(v))$ pour tous $v \in \mathbb{C}^n$ et $k \in \mathbb{Z}$. Notons P la matrice de α dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$; alors ce qui précède s'écrit $PM^k = (M')^kP$, ou encore $(M')^k = PM^kP^{-1}$. Comme l'égalité pour $k = 1$ entraîne
$\boxed{1}$ l'égalité pour tout k, finalement la condition d'équivalence est qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $M' = PMP^{-1}$.

5. Si $f_1, f_2, f_3 \in \widehat{G}$, l'associativité de la multiplication dans $\mathbb{C}^*$ implique que $(f_1(x)f_2(x))f_3(x) = f_1(x)(f_2(x)f_3(x))$ pour tout $x \in G$, donc $(f_1f_2)f_3 = f_1(f_2f_3)$. Du fait que $\mathbb{C}^*$ est commutatif découle aussi que $f_1f_2 = f_2f_1$. Soit $f \in \widehat{G}$. Si l'on note $1 : G \to \mathbb{C}^*$ la fonction constante de valeur 1, on voit que $f1 = 1f = f$. Si l'on note $f^{-1} : G \to \mathbb{C}^*$ la fonction définie par
$\boxed{1}$ $f^{-1}(x) = f(x)^{-1}$, on voit que $ff^{-1} = f^{-1}f = 1$. Tout ceci montre que le produit dont on

---

1. L'appellation « décomposition de Dunford » est très contestée, comme l'expliquent les documents suivants :
 - D. Couty, J. Esterle, R. Zarouf , Décomposition effective de Jordan-Chevalley, Gazette des Mathématiciens no 129 (2011), 29–49, disponible à l'adresse `http://smf4.emath.fr/Publications/Gazette/2011/129/smf_gazette_129_29-49.pdf`, notamment parties 1 et 5
 - M. Romagny, `https://www.lebesgue.fr/video/5min/romagny`. (Pardon pour l'auto-promotion.)

a équipé $\widehat{G}$ est associatif, commutatif, unitaire de neutre 1, et que tout élément possède un inverse bilatère, donc $\widehat{G}$ se trouve muni d'une structure de groupe abélien.

II La décomposition de Dunford

1. Supposons que $[S_1,S_2]=[S_1,N_2]=[N_1,S_2]=[N_1,N_2]=0$. Comme le crochet est bilinéaire, $\boxed{1}$ on en déduit $[A_1,A_2]=[S_1+N_1,S_2+N_2]=[S_1,S_2]+[S_1,N_2]+[N_1,S_2]+[N_1,N_2]=0$. $\boxed{1}$ Réciproquement, supposons que $[A_1,A_2]=0$. Alors tout polynôme en A_1 commute avec tout polynôme en A_2. Puisque S_i et N_i sont des polynômes en A_i (pour $i=1$ ou 2), on voit que les quatre commutateurs $[X_1,X_2]$, où X est l'un des symboles S,N, sont nuls.

2.(a) Étant donné que S est diagonale donc diagonalisable, et N nilpotente, il suffit que $[S,N]=$ $\boxed{1}$ 0 pour que $A=S+N$ soit la décomposition de Dunford. Par exemple, dans la question I.1 des exercices préliminaires, si l'on pose $S=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&a\end{smallmatrix}\right)$ et $N=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$ on a $[S,N]=\left(\begin{smallmatrix}0&1-a\\0&0\end{smallmatrix}\right)$ qui n'est nul que lorsque $a=1$.

2.(b) Fixons l'écriture par blocs $N=(N_{s,t})_{1\leqslant s,t\leqslant k}$ adaptée aux tailles des blocs de S, donc $\boxed{1}$ $N_{s,t}\in\mathrm{M}_{r_s,r_t}(\mathbb{C})$. Alors SN est la matrice dont le bloc (s,t) vaut $\sum_{u=1}^k S_{s,u}N_{u,t}=\alpha_s N_{s,t}$ alors que NS est la matrice dont le bloc (s,t) vaut $\sum_{u=1}^k N_{s,u}S_{u,t}=\alpha_t N_{s,t}$. On aura $SN=NS$ si et seulement si $\alpha_s N_{s,t}=\alpha_t N_{s,t}$ pour tous s,t. Prenant s et t distincts, on a $\alpha_s\neq\alpha_t$ donc $N_{s,t}=0$. $\boxed{1}$ Autrement dit, la matrice N est diagonale par blocs (pour des blocs de tailles égales à celles de S), à blocs nilpotents.

3.(a) Notons $B=S+N$ la décomposition de Dunford de B. On sait que B et S ont même spectres ; en particulier comme $B\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ elle n'a pas 0 pour valeur propre, donc S non plus et $\boxed{1}$ $S\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On peut donc écrire $B=S+N=TU$ où $T=S$ et $U=\mathrm{I}_n+S^{-1}N$. Montrons que cette écriture satisfait les conditions demandées. Comme $[S,N]=0$, en multipliant à gauche $\boxed{1}$ et à droite par S^{-1} il vient $[S^{-1},N]=0$. On déduit que $(S^{-1}N)^n=(S^{-1})^nN^n=0$, donc $S^{-1}N$ est nilpotente puis U unipotente. On en déduit aussi que $[T,U]=[S,\mathrm{I}_n+S^{-1}N]=0$. $\boxed{1}$ Enfin, on note que l'application $(S,N)\mapsto(T,U):=(S,\mathrm{I}_n+S^{-1}N)$ est inversible d'inverse $(T,U)\mapsto(S,N):=(T,TU-T)$. De plus, dans cette bijection (S,N) est la décomposition de Dunford si et seulement si (T,U) vérifie les propriétés requises dans la question, si bien que $\boxed{1}$ l'unicité de la décomposition de Dunford implique celle de la variante multiplicative.

$\boxed{1}$ 3.(b) Comme $T=S$, les propriétés $\chi_B=\chi_T$, $\operatorname{Sp}B=\operatorname{Sp}T$ et $T\in\mathbb{C}[B]$ découlent des propriétés de la décomposition de Dunford de B. Par ailleurs, le théorème de Cayley-Hamilton fournit une écriture de la forme $SP(S)=\det(S)\mathrm{I}_n$ où P est un polynôme. Ainsi $S^{-1}=\det(S)^{-1}P(S)\in$ $\boxed{1}$ $\mathbb{C}[S]\ \subset\mathbb{C}[B]$ puis $U=\mathrm{I}_n+S^{-1}N\in\mathbb{C}[B]$.

3.(c) Supposons que $[B_1,B_2]=0$. Alors tout polynôme en B_1 commute avec tout polynôme $\boxed{1}$ en B_2. Puisque T_i et U_i sont des polynômes en B_i (pour $i=1$ ou 2), on voit que les quatre $\boxed{1}$ commutateurs $[X_1,X_2]$, où X est l'un des symboles T,U, sont nuls. Réciproquement, supposons que $[T_1,T_2]=[T_1,U_2]=[U_1,T_2]=[U_1,U_2]=0$. Alors $B_1B_2=T_1U_1T_2U_2=T_2U_2T_1U_1=B_2B_1$ donc $[B_1,B_2]=0$.

4.(a) Notons k le cardinal de $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ et, quitte à réordonner $\{1,\dots,n\}$, supposons que $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ sont distincts. D'après I.3, il existe un polynôme $F\in\mathbb{C}_{k-1}[X]$ tel que $F(\alpha_i)=f(\alpha_i)$ pour tout $i\in\{1,\dots,k\}$; c'est bien sûr encore vrai pour $i\in\{k+1,\dots,n\}$. En appliquant F $\boxed{1}$ aux égalités $S=PDP^{-1}=P'D'P'^{-1}$ on obtient l'égalité demandée

$$F(S)=P\operatorname{Diag}(f(\alpha_1),\dots,f(\alpha_n))P^{-1}=P'\operatorname{Diag}(f(\alpha'_1),\dots,f(\alpha'_n))P'^{-1}.$$

4.(b) Commençons par expliquer le sens de l'expression $\sum_{k\geqslant0}a_kS^k$ lorsque $\sum a_kz^k$ est une série entière de rayon de convergence infini (on pourrait noter $\sum_{k=0}^{\infty}a_kS^k$ la somme de la série, pour

la distinguer de la série elle-même). Pour cela on fixe une norme $\|\cdot\|$ de $\mathbb{C}^n$, d'où une norme subordonnée $|||\cdot|||$ qui est une norme d'algèbre sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$; en particulier elle est sous-additive et sous-multiplicative. Comme toutes les normes sont équivalentes (soit dans $\mathbb{C}^n$, soit directement
$\boxed{1}$ dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$), elles donnent toutes naissance à la même notion de convergence, avec mêmes limites lorsqu'il y a convergence ; le choix de $\|\cdot\|$ n'a donc pas d'importance. Dans l'espace vectoriel normé, la série $\sum_{k\geqslant 0} a_k S^k$ est absolument convergente, puisque $|||\sum_{k\geqslant 0} a_k S^k||| \leqslant$
$\boxed{1}$ $\sum_{k\geqslant 0} |a_k| \cdot |||S^k|||$ où la série qui majore est convergente d'après le lemme d'Abel et le fait que $\sum a_k z^k$ a un rayon de convergence infini. La limite $\sum_{k=0}^{\infty} a_k S^k$ (notée $\sum_{k\geqslant 0} a_k S^k$ dans le problème) est la limite de cette série absolument convergente.

Passons à la vérification demandée. Pour tout $K \geqslant 0$, utilisant de nouveau le fait que la conjugaison c_P est un automorphisme d'algèbre, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
P \cdot \mathrm{Diag}(\sum_{k=0}^{K} a_k \alpha_1^k, \ldots, \sum_{k=0}^{K} a_k \alpha_1^k) \cdot P^{-1} &= P\left(\sum_{k=0}^{K} a_k \,\mathrm{Diag}(\alpha_1^k, \ldots, \alpha_1^k)\right) P^{-1} \\
&= P\left(\sum_{k=0}^{K} a_k \,\mathrm{Diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_1)^k\right) P^{-1} \\
&= \sum_{k=0}^{K} a_k \cdot P\,\mathrm{Diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^k P^{-1} \text{ car } c_P \text{ est linéaire,} \\
\boxed{2}\qquad &= \sum_{k=0}^{K} a_k \cdot (P\,\mathrm{Diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) P^{-1})^k \text{ car } c_P \text{ est multiplicative,} \\
&= \sum_{k=0}^{K} a_k S^k.
\end{aligned}$$

Dans le membre de gauche, la limite lorsque K tend vers l'infini est $P\,\mathrm{Diag}(f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_n))P^{-1}$ car c_P est continue. Dans le membre de droite, la limite est $\sum_{k\geqslant 0} a_k S^k$ par définition. D'où l'égalité demandée.

III L'exponentielle $\exp : \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est surjective

1.(a) D'après la question II.4.(b) avec $f := \exp$, on a $\exp S = P\,\mathrm{Diag}(\exp\alpha_1, \ldots, \exp\alpha_n)P^{-1}$.
$\boxed{1}$ Comme $\exp\alpha_i = \beta_i$, ceci prouve que $\exp S = T$.

1.(b) Notons k le cardinal de $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$. Quitte à réordonner $\{1, \ldots, n\}$, on peut supposer que $\beta_1, \ldots, \beta_k$ sont distincts. D'après la question I.3, il existe un polynôme $F \in \mathbb{C}_{k-1}[X]$ tel
$\boxed{1}$ que $F(\beta_i) = \alpha_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$. Cette égalité vaut aussi pour $i \in \{k+1, \ldots, n\}$ car par choix de k, il existe $j \leqslant k$ tel que $\beta_i = \beta_j$, donc

$$\begin{aligned}
F(\beta_i) = F(\beta_j) &= \alpha_j \text{ par choix de } F, \\
&= \alpha_i \text{ d'après l'hypothèse de la question.}
\end{aligned}$$

$\boxed{1}$ De II.4.(b) avec $f := F$, on déduit $S = P\,\mathrm{Diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)P^{-1} = P\,\mathrm{Diag}(F(\beta_1), \ldots, F(\beta_n))P^{-1} = F(T) \in \mathbb{C}[T]$.

1.(c) Conservons les notations de la réponse de 1.(b), c'est-à-dire que $\beta_1, \ldots, \beta_k$ sont distincts et les suivants en sont des répétitions. Comme l'exponentielle complexe $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est
$\boxed{1}$ surjective, pour chaque $i \in \{1, \ldots, k\}$ on peut trouver α_i tel que $\exp(\alpha_i) = \beta_i$. Pour chacun des indices $i \in \{k+1, \ldots, n\}$, il existe $j \leqslant k$ tel que $\beta_i = \beta_j$, et on peut alors poser $\alpha_i := \alpha_j$ qui vérifie bien $\exp(\alpha_i) = \exp(\alpha_j) = \beta_j = \beta_i$.

1.(d) Prenons $n = 2$, $\beta_1 = \beta_2 = 1$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 2i\pi$, $P = \mathrm{I}_2$, de sorte que $T = \mathrm{I}_2$ et
$\boxed{1}$ $S = \mathrm{Diag}(0, 2i\pi)$. Toutes les conditions de 1.(a) sont alors vérifiées. De plus T étant une
matrice scalaire, $\mathbb{C}[T]$ est composé entièrement de matrices scalaires i.e. $\mathbb{C}[T] = \mathbb{C}$. Comme S
n'est pas scalaire, on a $S \notin \mathbb{C}[T]$.

2.(a) Considérons les fonctions $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$ et $\ln : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$. Ces fonctions sont de classe C^∞
sur leur intervalle de définition, donc elles ont des développements de Taylor à tout ordre en
tout point. De plus, on a $\ln(\exp(x)) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\exp(\ln(x)) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$.
Notons $\mathrm{Tay}_n(f; x)$ le développement de Taylor à l'ordre n (DT_n) d'une fonction f en un point
$\boxed{1}$ x. Le théorème de composition des développements de Taylor dit que si g admet un DT_n en
x et f admet un DT_n en $g(x)$, alors $f \circ g$ admet un DT_n en x et $\mathrm{Tay}_n(f \circ g; x)$ est obtenu en
tronquant modulo x^n le polynôme composé $\mathrm{Tay}_n(f; \mathrm{Tay}_n(g))$. Pour $f = \ln$ et $g = \exp$ en $x = 0$,
$\boxed{1}$ ceci donne l'égalité $L_n \circ E_n \equiv X \pmod{X^n}$. Pour $f = \exp$ et $g = \ln$ en $x = 1$, ceci donne
$\boxed{1}$ l'égalité $E_n \circ L_n \equiv X \pmod{(X-1)^n}$.

2.(b) Dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, notons $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes et $\mathcal{U}$ l'ensemble des matrices
unipotentes. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, pour tout $N \in \mathcal{N}$ on a $N^n = 0$ et il en
découle que $\exp(N) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} N^k = E_n(N)$. De plus $E_n(N) \in \mathcal{U}$ car $E_n(N) - \mathrm{I}_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} N^k$
$\boxed{1}$ est somme de matrices nilpotentes qui commutent. De même, pour tout $U \in \mathcal{U}$ on a $(U - \mathrm{I}_n)^n = 0$
et $L_n(U) \in \mathcal{N}$. On a donc des applications $E_n : \mathcal{N} \to \mathcal{U}$ et $L_n : \mathcal{U} \to \mathcal{N}$ et il suffit de montrer
que ce sont des bijections réciproques. Or d'après 2.(a), il existe des polynômes A, B tels que
$\boxed{2}$ $L_n(E_n(X)) = X + X^n A(X)$ et $E_n(L_n(X)) = X + (X-1)^n B(X)$. La première de ces égalités
polynômiales évaluée sur une matrice $N \in \mathcal{N}$ donne $L_n(E_n(N)) = N$. La deuxième évaluée
sur une matrice $U \in \mathcal{U}$ donne $E_n(L_n(U)) = U + (U - \mathrm{I}_n)^n B(U) = U$. Ceci établit que ce sont
des bijections réciproques l'une de l'autre.

3. Soit $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et notons $B = TU$ sa décomposition de Dunford multiplicative telle que
dans II.3.(a). D'une part, on sait que T est diagonalisable, notons β_i ses valeurs propres se sorte
que $T = P\,\mathrm{Diag}(\beta_1, \ldots, \beta_n)P^{-1}$ pour une certaine matrice de passage P. D'après 1.(c), on peut
choisir des $\alpha_i \in \mathbb{C}$ tels que $\exp(\alpha_i) = \beta_i$ pour tout i, de telle sorte que $\beta_i = \beta_j$ implique $\alpha_i = \alpha_j$.
$\boxed{1}$ D'après 1.(a) et 1.(b) la matrice $S = P\,\mathrm{Diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)P^{-1}$ vérifie alors $\exp S = T$ et $S \in \mathbb{C}[T]$.
Comme $T \in \mathbb{C}[B]$, on déduit que $S \in \mathbb{C}[B]$. D'autre part, la matrice U est unipotente, et la
question 2.(b) nous indique qu'il existe une unique matrice nilpotente N telle que $\exp(N) = U$;
$\boxed{1}$ de plus $N = L_n(U)$ est un polynôme en U. Comme $U \in \mathbb{C}[B]$, on déduit que $N \in \mathbb{C}[B]$.
Finalement S et N sont des polynômes en B donc elles commutent. Posons $A = S + N$. Il
découle de la propriété fondamentale de l'exponentielle de deux matrices commutantes, rappelée
$\boxed{1}$ dans l'introduction du problème, que $\exp(A) = \exp(S+N) = \exp(S)\exp(N) = TU = B$. Donc
$\exp : \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est surjective.

IV La fonction matricielle z^A et sa monodromie

$\boxed{1}$ 1. L'égalité $\exp \circ \log = \mathrm{id}_\Omega$ s'écrit $\exp(\log(z)) = z$ pour tout $z \in \Omega$. En dérivant par rapport à
z on trouve $(d\log/dz)\exp(\log(z)) = 1$. Il en découle $d\log/dz = 1/z$ donc $\delta(\log) = 1$. Le calcul
$\boxed{1}$ direct montre alors que $(d/dz)(z^\alpha) = (d/dz)(\exp(\alpha\log(z)) = \alpha \cdot (1/z) \cdot \exp(\alpha\log(z)) = \alpha z^{\alpha-1}$
donc $\delta(z^\alpha) = \alpha z^\alpha$.

2. Soit f une détermination du logarithme sur Ω. Soit $z \in \Omega$. On a $\exp(f(z)) = \mathrm{id}_\Omega = \exp(\log z)$
$\boxed{1}$ dont on déduit $\exp(f(z) - \log z) = 1$. Il s'ensuit qu'il existe un entier $k(z) \in \mathbb{Z}$ tel que $f(z) =$
$\log z + 2i\pi k(z)$. Comme f est continue, on déduit que la fonction k est continue. Comme elle est
$\boxed{1}$ définie sur un connexe et à valeurs discrètes, elle est constante, ce qui montre que $f = Log^{(k)}$.

$\boxed{1}$ 3.(a) On a $(\log z)S = P\,\mathrm{Diag}(\log z \cdot \alpha_1, \ldots, \log z \cdot \alpha_n)P^{-1}$ puis, d'après I.2, $z^S = \exp((\log z)S) =$

1 $P\,\mathrm{Diag}(z^{\alpha_1},\dots,z^{\alpha_n})P^{-1}$. Passons à z^N, comme $(\log z)N$ est nilpotente on a $z^N = \exp((\log z)N) =$
$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}(\log z)^k N^k$. Enfin, de $A = S+N$ on tire $(\log z)A = (\log z)S + (\log z)N$ où les deux
1 termes commutent entre eux. Par propriété fondamentale de l'exponentielle, on déduit $z^A =$
$\exp((\log z)A) = \exp((\log z)S)\exp((\log z)N) = z^S z^N$. Comme $S+N = N+S$, le même raisonnement montre que $z^A = z^N z^S$.

3.(b) Avec les notations de 3.(a), comme z^S est diagonalisable on a $\det(z^S) = \prod_{i=1}^n z^{\alpha_i} =$
1 $z^{\sum\alpha_i} = z^{\mathrm{Tr}(S)}$. Par ailleurs on voit que z^N est unipotente, donc $\det(z^N) = 1$. Finalement
$\det(z^A) = \det(z^S z^N) = \det(z^S)\det(z^N) = z^{\mathrm{Tr}(S)} = z^{\mathrm{Tr}(A)}$.

4. Précisons les expressions données en 3.(a) : d'une part comme $\mathrm{Sp}\,S = \mathrm{Sp}\,A$, dans l'écriture
$z^S = P\,\mathrm{Diag}(z^{\alpha_1},\dots,z^{\alpha_n})P^{-1}$ ce sont les valeurs propres de A qui apparaissent et d'autre part,
1 en faisant apparaître l'indice de nilpotence d de N, on peut écrire $z^N = \sum_{k=0}^{d-1}\frac{1}{k!}(\log z)^k N^k$.
L'expression du produit matriciel $z^A = z^S z^N$ montre que chacun de ses coefficients est une combinaison linéaire de produits $z^\alpha(\log z)^k$ avec $\alpha \in \mathrm{Sp}\,A$ et $k < d$.

5. En raisonnant comme en 3.(a), on écrit $A = S+N$ et on calcule $\exp(f(z)A) = \exp(f(z)S)\exp(f(z)N)$,
avec $\exp(f(z)S) = P\,\mathrm{Diag}(\exp(f(z)\alpha_1),\dots,\exp(f(z)\alpha_n))P^{-1}$ et $\exp(f(z)N) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}f(z)^k N^k$.
1 On note en passant que par sa définition, $\exp(f(z)A) = \sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{k!}f(z)^k A^k$ est une limite de polynômes en A ; or, comme tout sous-espace vetoriel du $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, l'espace $\mathbb{C}[A]$ des polynômes en A est fermé, dont la limite $\exp(f(z)A)$ appartient à $\mathbb{C}[A]$. Cet argument montre que $\exp(f(z)S)$ (resp. $\exp(f(z)N)$) est un polynôme en S (resp. en N), donc un polynôme en A.

Passons au calcul de $\delta(\exp(f(z)A))$. Comme $\delta(P) = 0$, la règle de Leibniz montre que

1
$$\begin{aligned}\delta(\exp(f(z)S)) &= P\,\mathrm{Diag}(\delta(\exp(f(z)\alpha_1)),\dots,\delta(\exp(f(z)\alpha_n)))P^{-1}\\ &= zf'(z)P\,\mathrm{Diag}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)P^{-1}\exp(f(z)S)\\ &= zf'(z)S\exp(f(z)S).\end{aligned}$$

Par ailleurs, en dérivant terme à terme l'expression de $\exp(f(z)N)$ il vient

1
$$\delta(\exp(f(z)N)) = z\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k-1)!}f'(z)f(z)^{k-1}N^k = zf'(z)N\exp(f(z)N).$$

Utilisant encore la règle de Leibniz, on trouve :

$$\begin{aligned}\delta(\exp(f(z)A)) &= \exp(f(z)S)\cdot\delta(\exp(f(z)N)) + \delta(\exp(f(z)S))\cdot\exp(f(z)N)\\ &= \exp(f(z)S)zf'(z)N\exp(f(z)N) + zf'(z)S\exp(f(z)S)\exp(f(z)N).\end{aligned}$$

Comme toutes ces matrices sont des polynômes en A, on peut les commuter à loisir pour trouver :

1
$$\delta(\exp(f(z)A)) = zf'(z)(N+S)\exp(f(z)S)\exp(f(z)N) = \delta(f)A\exp(f(z)A) = \delta(f)\exp(f(z)A)A.$$

0 En particulier, lorsque $f(z) = \log z$ on trouve $\delta(z^A) = Az^A = z^A A$.

6. Posons $C := z^{-A}\mathscr{X}$ qui est élément de $\mathrm{M}_n(\mathscr{O})$. En utilisant la règle de Leibniz, l'hypothèse
1 sur $\delta(\mathscr{X})$ et la question 5 on calcule $\delta(C) = z^{-A}\delta(\mathscr{X}) + \delta(z^{-A})\mathscr{X} = z^{-A}A\mathscr{X} - z^{-A}A\mathscr{X} = 0$.
1 Ceci signifie que chaque coefficient $c_{i,j} = c_{i,j}(z)$ de la matrice C vérifie $\delta(c_{i,j}) = 0$. Compte tenu
de la définition de δ, ceci implique que $c'_{i,j} = 0$ donc $c_{i,j}$ est une fonction constante sur Ω. Ainsi C est une matrice constante.

1 7.(a) Posons $f(z) = Log^{(k)}(z)$, donc $\delta(f) = 1$. La question 5 fournit immédiatement $\delta\left[z^A\right]_k =$
$A\left[z^A\right]_k = \left[z^A\right]_k A$. La question 6 avec $\mathscr{X} := \left[z^A\right]_k$ montre alors qu'il existe une matrice $M_k \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\left[z^A\right]_k = z^A M_k$.

7.(b) Le calcul (et d'ailleurs l'existence) de M_k se fait directement en prenant l'exponentielle dans l'expression $Log^{(k)}(z)A = (\log z)A + 2ik\pi A$ où les deux termes commutent :

1 $$\left[z^A\right]_k = \exp((\log z)A + 2ik\pi A) = \exp((\log z)A)\,\exp(2ik\pi A) = \left[z^A\right]_k M_k$$

avec $M_k := \exp(2ik\pi A)$. On note que si l'on pose $M = \exp(2i\pi A)$, on a $M_k = M^k$, donc $M_{k+l} = M^{k+l} = M^k M^l = M_k M_l$, c'est-à-dire que $k \mapsto M_k$ est une représentation de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}^n$.

8. La surjectivité de l'exponentielle établie dans III montre que toute matrice M est de la forme
1 $M = \exp(2i\pi A)$ avec $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, donc toute représentation de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}^n$ est de la forme ρ_A.

V Algèbres différentielles et automorphismes différentiels

1.(a) Un élément de $\mathcal{A}$ est une combinaison $\mathbb{C}$-linéaire de produits de « monômes » pris parmi
1 $z^{\alpha_1}, \ldots, z^{\alpha_n}$ (avec répétitions possibles). Si chaque z^{α_i} est choisi m_i fois, le produit qui en résulte est $z^{m_1\alpha_1+\cdots+m_n\alpha_n}$. Ceci démontre que $\mathcal{A} \subset \sum_{l\in L} \mathbb{C}z^l$. Réciproquement, comme les z^{α_i} sont dans $\mathcal{A}$, alors les produits $z^{m_1\alpha_1+\cdots+m_n\alpha_n}$ également, de même que leurs combinaisons linéaires, donc $\sum_{l\in L} \mathbb{C}z^l \subset \mathcal{A}$.

1.(b) Nous savons que δ est $\mathbb{C}$-linéaire et préserve les générateurs de $\mathcal{A}$ puisque $\delta(z^\alpha) = \alpha z^\alpha$.
1 La règle de Leibniz montre alors que $\delta(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$.

1.(c) Soit $\sum_{i=1}^k \lambda_i z^{l_i} = 0$ une combinaison linéaire entre des éléments de la famille z^l, $l \in L$. Supposons que les l_i sont tous distincts. Pour chaque entier $j \in \{0, \ldots, k-1\}$, appliquant δ^j à la
1 relation on obtient $\sum_{i=1}^k \lambda_i (l_i)^j z^{l_i} = 0$. Ceci forme k équations linéaires en les k variables $\lambda_i z^{l_i}$. Comme les l_i sont distincts deux à deux, la matrice de Vandermonde $V(l_1, \ldots, l_k)$ de coefficient
1 général $(l_i)^j$ est inversible. On déduit que $\lambda_i z^{l_i} = 0$ pour tout i, d'où $\lambda_i = 0$ lorsqu'on évalue en
1 $z = 1$. Ceci montre que la combinaison linéaire est nulle, donc $\{z^l\}_{l\in L}$ est une $\mathbb{C}$-base de $\mathcal{A}$.

1.(d) Montrons d'abord que v est de la forme λz^l. Si $v = 0$ c'est clair ; sinon, d'après 1.(a) et 1.(c), il existe une unique écriture $v = \sum_{i=1}^k \lambda_i z^{l_i}$ où $k \geqslant 1$, les l_i sont distincts et les λ_i non nuls. L'équation $\delta v = lv$ donne $\sum_{i=1}^k \lambda_i l_i z^{l_i} = \sum_{i=1}^k l\lambda_i z^{l_i}$ d'où, par unicité $\lambda_i l_i = \lambda_i l$ pour
1 tout i. Puisqu'il existe un λ_i non nul, on déduit que $l_i = l$ pour tout i ; les l_i étant distincts, il s'ensuit que $k = 1$ et $v = \lambda z^l$ comme souhaité. Montrons ensuite que $v = 0$ et $u \in \mathbb{C}z^l$. Si $u = 0$ c'est clair ; sinon on peut écrire $u = \sum_{i=1}^k \lambda_i z^{l_i}$ où les l_i sont distincts et les λ_i non nuls.
1 De l'hypothèse $\delta u - lu = v$, découle que $\sum_{i=1}^k \lambda_i (l_i - l) z^{l_i} = v = \lambda z^l$. Par unicité, en regardant les coefficients de z^l on trouve $\lambda = 0$. S'il apparaît un z^{l_i} avec $l_i \neq l$, son coefficient est non nul dans le membre de gauche et nul dans le membre de droite, contradiction ; donc $k = 1$ et il n'apparaît pas de tel l_i. En conclusion $v = \lambda z^l = 0$ et $u = \lambda' z^l \in \mathbb{C}z^l$.

2.(a) L'ensemble des sommes finies de fonctions $f_k \log^k$ avec $f_k \in \mathcal{A}$ est une $\mathbb{C}$-algèbre qui
1 contient les générateurs z^l de $\mathcal{A}$ et la fonction log, donc contient $\mathcal{A}'$. Réciproquement, chaque produit $f_k \log^k$ est par définition dans $\mathcal{A}'$, donc aussi toutes les sommes finies de tels éléments, d'où l'inclusion réciproque.

2.(b) Puisque $\delta(\log^k) = k \log^{k-1}$, on a :

1 $$\delta\left(\sum_{k=0}^p f_k \log^k\right) = \sum_{k=0}^p \delta(f_k)\log^k + k f_k \log^{k-1} = \left(\sum_{k=0}^{p-1} (\delta(f_k) + (k+1) f_{k+1}) \log^k\right) + \delta(f_p)\log^p\,.$$

On voit que c'est encore un élément de $\mathcal{A}'$.

3.(a) Supposons qu'il existe $u, v \in \mathcal{A}$ tels que $u+v\log = 0$ mais $u, v \neq 0$ (on note que l'équation implique que $u = 0$ si et seulement si $v = 0$). On peut toujours écrire $v = \lambda_1 z^{l_1} + \cdots + \lambda_p z^{l_p}$ avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{C}^*$ et $l_1, \ldots, l_p \in L$ deux à deux distincts. Choisissons une telle écriture dans laquelle la « longueur » p est minimale; on a $p \geqslant 1$ car $v \neq 0$. Notons $(\mathscr{E})$ l'équation
$\boxed{1}$ $u + v\log = 0$ et $(\mathscr{F})$ l'équation $(\delta u + v) + \delta v \log = 0$ obtenue en appliquant δ à $(\mathscr{E})$. La combinaison $(\mathscr{F}) - l_1(\mathscr{E})$ est une nouvelle équation $u' + v'\log = 0$ avec $u' = \delta u + v - l_1 u$ et
$\boxed{1}$ $v' = \delta v - l_1 v$. Puisque $\delta(v) = l_1\lambda_1 z^{l_1} + \cdots + l_p\lambda_p z^{l_p}$, la longueur de v' est strictement plus petite que celle de v. Par minimalité, ceci n'est possible que si $u' = v' = 0$, c'est-à-dire $\delta v = l_1 v$ et $\delta u - l_1 u = -v$. Ce système d'équations est le même que celui de 1.(d) au détail près que c'est
$\boxed{1}$ $-v$ au lieu de v dans le membre de droite de la seconde équation. En relisant la démonstration faite en 1.(d), on voit que ce signe ne change rien et que les conclusions $v = 0$, $u \in \mathbb{C}z^{l_1}$ restent valables. Ces conclusions contredisent notre hypothèse $u, v \neq 0$, donc il n'existe pas $u, v \in \mathcal{A}$ tels que $u + v\log = 0$.

3.(b) Supposons qu'il existe une relation d'annulation $(\mathscr{E})$: $\sum_{k=0}^{p} f_k \log^k = 0$ dans $\mathcal{A}'$, avec $p \geqslant 0$ et $f_p \neq 0$. Choisissons une telle écriture dans laquelle le « degré » p est minimal. Clairement $p \geqslant 1$, car on ne peut avoir $f_0 \log^0 = f_0 = 0$ avec $f_0 \neq 0$. En appliquant δ, on trouve une nouvelle relation :

$$(\mathscr{F}) : \quad \left(\sum_{k=0}^{p-1} (\delta(f_k) + (k+1) f_{k+1}) \log^k\right) + \delta(f_p)\log^p = 0.$$

$\boxed{1}$ La combinaison $f_p(\mathscr{F}) - \delta(f_p)(\mathscr{E})$ est une relation de longueur strictement inférieure à p car le coefficient de $\log^p$ s'y annule. Le choix de p impose alors que $f_p(\mathscr{F}) - \delta(f_p)(\mathscr{E})$ est la relation triviale, dont tous les coefficients sont nuls; en particulier l'annulation du coefficient de $\log^{p-1}$
$\boxed{1}$ donne $\delta(f_p)f_{p-1} - f_p(\delta(f_{p-1} + pf_p) = 0$. Posons $g = f_{p-1}/f_p$. La règle de Leibniz permet de calculer $\delta(f_{p-1}) = \delta(f_p g) = \delta(f_p)g + f_p\delta(g)$ donc

$$\delta(g) = \frac{\delta(f_{p-1})f_p - f_{p-1}\delta(f_p)}{(f_p)^2} = -p.$$

$\boxed{1}$ L'équation $\delta(g) = zg'(z) = -p$ se résout en $g(z) = -p\log + c$ pour un $c \in \mathbb{C}$. Réinjectant la définition de g, on obtient $f_{p-1} - cf_p - pf_p\log = 0$. D'après 3.(a) ceci n'est possible que
$\boxed{1}$ si $f_{p-1} - cf_p = pf_p = 0$. Comme $p \geqslant 1$, on tire $f_p = 0$, en contradiction avec l'hypothèse, d'où la conclusion attendue. Terminons par une remarque : on a ainsi montré que tout élément de $\mathcal{A}'$ s'écrit de manière unique $f = \sum_k f_k \log^k$, ce qui est un « polynôme en la variable log à coefficients dans $\mathcal{A}$ ». On peut formaliser ceci en disant que l'application $\phi : \mathcal{A}[X] \to \mathcal{A}'$, $f = \sum_k f_k \log^k \mapsto \phi(f) = \sum_k f_k X^k$ est un isomorphisme de $\mathcal{A}$-algèbres. Cet isomorphisme montre que comme $\mathcal{A}$-algèbre, $\mathcal{A}'$ n'est rien d'autre qu'une algèbre de polynômes.

4. Notons $G = \mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{B})$. L'identité $\mathrm{id}_{\mathcal{B}}$ commute clairement avec δ donc appartient à G. Soient
$\boxed{1}$ $\sigma, \tau \in G$. Alors, de $\sigma \circ \tau \circ \delta = \sigma \circ \tau \circ \delta = \sigma \circ \delta \circ \tau = \delta \circ \sigma \circ \tau$ on déduit que $\sigma \circ \tau \in G$. Enfin, de $\sigma \circ \delta = \delta \circ \sigma$ on déduit en précomposant et postcomposant avec σ^{-1} que $\sigma^{-1} \circ \delta = \delta \circ \sigma^{-1}$; ainsi $\sigma^{-1} \in G$ et G est bien un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\mathcal{B})$.

$\boxed{0}$ 5.(a) C'est le résultat de la question IV.4.

$\boxed{1}$ 5.(b) On calcule $\delta(\mathscr{X}) = \delta(\sigma(z^A)) = \sigma(\delta(z^A)) = \sigma(Az^A) = \sigma(A)\sigma(z^A) = A\mathscr{X}$ où la dernière égalité utilise le fait que $\sigma(A) = A$, puisque les coefficients de A sont des fonctions constantes.
$\boxed{1}$ On déduit de IV.6 que $\mathscr{X} = z^A M_\sigma$ pour une certaine matrice $M_\sigma \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, unique puisque

z^A est inversible (d'inverse z^{-A}) et inversible puisque $\mathscr{X}$ également est inversible (d'inverse $\sigma(z^{-A})$).

5.(c) Soient $\sigma, \tau \in \mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{A}')$. La matrice M_σ est caractérisée par l'égalité $\sigma(z^A) = z^A M_\sigma$. Or on a :

$\boxed{1}$ $$z^A M_{\sigma\tau} = \sigma(\tau(z^A)) = \sigma(z^A M_\tau) = \sigma(z^A) M_\tau = z^A M_\sigma M_\tau,$$

d'où $M_{\sigma\tau} = M_\sigma M_\tau$. Ceci montre que $\sigma \mapsto M_\sigma$ est un morphisme de groupes, définissant une représentation de $\mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{A}')$. *Remarque : à strictement parler, on dit représentation* « dans $\mathbb{C}^n$ » *et non pas* « dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ».

VI Groupes et représentations de Picard-Vessiot

Nous apprenons par le titre de cette partie que les initiales PV du groupe $\mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{A}')$ proviennent des noms d'Émile Picard (1856-1941) et Ernest Vessiot (1865-1952) qui ont étudié les équations différentielles par des méthodes algébriques, et notamment des méthodes issues de la théorie de Galois (cf par exemple cette page wikipedia).

1.(a) Notons $f = \sigma(\log)$. On a $\delta(\log) = 1$. Comme $\sigma(1) = 1$ et σ commute avec δ, en appliquant
$\boxed{1}$ σ on déduit que $\delta(f) = 1$. Les solutions de cette équation sont $f = \log + \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$, comme attendu.

1.(b) Notons $f = \sigma(z^l)$. On a $\delta(z^l) = lz^l$. Comme $\sigma(l) = l$ et σ commute avec δ, en appliquant
$\boxed{1}$ σ on déduit que $\delta(f) = lf$. Les solutions de cette équation sont $f = c_l z^l$ avec $c_l \in \mathbb{C}^*$, comme
$\boxed{1}$ attendu. Soient maintenant $l, l' \in L$. Alors $c_{l+l'} z^{l+l'} = \sigma(z^{l+l'}) = \sigma(z^l \cdot z^{l'}) = \sigma(z^l)\sigma(z^{l'}) = c_l z^l c_{l'} z^{l'} = c_l c_{l'} z^{l+l'}$. Il en découle que $c_{l+l'} = c_l c_{l'}$.

1.(c) La question 1.(b) montre que $\mathcal{A}$ est stable par σ. Pour la même raison, $\mathcal{A}$ est stable
$\boxed{1}$ par σ^{-1}, ce qui montre que $\sigma_{|\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ est surjective donc un *auto*morphisme de $\mathcal{A}$. De plus, puisque $\sigma \in \mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{A}')$ commute avec δ, sa restriction $\sigma_{|\mathcal{A}}$ commute encore avec δ, i.e. $\sigma_{|\mathcal{A}} \in \mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{A})$.

$\boxed{1}$ 2.(a) Par propriété élémentaire de la restriction, l'application $\mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{A}') \to \mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{A})$, $\sigma \mapsto \sigma_{|\mathcal{A}}$ est un morphisme de groupes. Montrons que $\mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{A}') \to \mathbb{C}$, $\sigma \mapsto \lambda_\sigma$ est un morphisme : si σ, τ sont dans $\mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{A}')$, on a $\log + \lambda_{\sigma\tau} = \sigma(\tau(\log)) = \sigma(\log + \lambda_\tau) = \sigma(\log) + \sigma(\lambda_\tau) =$
$\boxed{1}$ $\sigma(\log) + \lambda_\tau = \log + \lambda_\sigma + \lambda_\tau$ d'où $\lambda_{\sigma\tau} = \lambda_\sigma + \lambda_\tau$ comme souhaité. En conséquence, l'application $\mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{A}') \to \mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{A}) \times \mathbb{C}$ dont les composantes sont les deux applications précédentes est un morphisme groupes. Le fait que ce morphisme soit injectif provient du fait que comme $\mathcal{A}'$
$\boxed{1}$ est engendrée par $\mathcal{A}$ et la fonction log, les valeurs de σ sont déterminées par $\sigma_{|\mathcal{A}}$ et $\sigma(\log)$.

2.(b) On a vu en V.3.(b) que chaque élément $f \in \mathcal{A}'$ possède une écriture unique $f = \sum_{k=0}^{p} f_k \log^k$, avec de plus $f_p \neq 0$ si $f \neq 0$. Unicité : s'il existe un élément $\sigma \in \mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{A}')$
$\boxed{1}$ tel que $\sigma_{|\mathcal{A}} = \sigma_0$ et $\sigma(\log) = \log + \lambda$, on a $\sigma(f) = \sum_{k=0}^{p} \sigma_0(f_k)(\log + \lambda)^k$ ce qui le détermine uniquement. Existence : on considère l'application σ définie par la formule précédente, et on doit montrer les propriétés suivantes :

(i) σ est un automorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres, i.e. il est $\mathbb{C}$-linéaire et multiplicatif,

(ii) $\sigma_{|\mathcal{A}} = \sigma_0$ et $\sigma(\log) = \log + \lambda$.

Pour (i), deux voies sont possibles. Soit on utilise la définition de σ et les propriétés de σ_0
$\boxed{2}$ pour faire des vérifications explicites ; nous ne le faisons pas ici. Soit on utilise l'isomorphisme de $\mathcal{A}$-algèbres $\phi : \mathcal{A}[X] \to \mathcal{A}'$, $f = \sum_k f_k \log^k \mapsto \phi(f) = \sum_k f_k X^k$ exhibé en remarque dans V.3.(b) qui permet de voir $\mathcal{A}'$ comme $\mathcal{A}[X]$. Alors σ n'est rien d'autre que la composée de deux automorphismes de $\mathbb{C}$-algèbres classiques : l'automorphisme $\sum_k f_k X^k \mapsto \sum_k \sigma_0(f_k) X^k$ obtenu en appliquant σ_0 sur les coefficients, et le $\mathcal{A}$-automorphisme obtenu par translation de

la variable $X \mapsto X + \lambda$ et étendu à tous les polynômes. Enfin, la propriété (ii) est claire par définition.

2.(c) On doit montrer que $\sigma \circ \delta = \delta \circ \sigma$. Une possibilité est de le démontrer en utilisant l'expression explicite de $\sigma(f)$ et celle pour $\delta(f)$ donnée en V.2.(b), ce qui mène à des formules énormes. On peut être plus malin en faisant la remarque suivante : la $\mathbb{C}$-linéarité de σ et δ, d'une part, et la multiplicativité de σ et la règle de Leibniz pour δ, d'autre part, ont pour
$\boxed{2}$ conséquence que σ, δ ainsi que $\sigma \circ \delta, \delta \circ \sigma$, sont entièrement déterminées par leurs valeurs en les éléments $f \in \mathcal{A}$ et $f = \log$. On aura donc $\sigma \circ \delta = \delta \circ \sigma$ pourvu qu'elles coïncident en ces éléments. Or si $f \in \mathcal{A}$, on a $\sigma(\delta(f)) = \sigma_0(\delta(f))$ puisque $\delta(f) \in \mathcal{A}$, et $\delta(\sigma(f)) = \delta(\sigma_0(f))$ puisque $f \in \mathcal{A}$. Ces deux quantités sont égales car σ_0 commute avec δ. Enfin si $f = \log$, on a $\sigma(\delta(\log)) = \sigma(1) = 1$ et $\delta(\sigma(\log)) = \delta(\log + \lambda) = 1$. Ceci termine la démonstration.

$\boxed{1}$ 3. Le groupe G est abélien, et par définition de type fini engendré par n éléments. De plus, il est sous-groupe du sous-groupe sans torsion $(\mathbb{C}, +)$, donc il est lui-même sans torsion. Le
$\boxed{1}$ théorème de structure dit qu'un tel groupe est libre de rang fini $m \leqslant n$, c'est-à-dire qu'il existe un isomorphisme $u : G \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}^m$. Notons $e_i \in G$ les préimages par u des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{Z}^n$. La propriété d'un groupe libre est qu'un morphisme $f : G \to \mathbb{C}^*$ est
$\boxed{1}$ déterminé de manière unique par le uplet $v(f) := (f(e_1), \ldots, f(e_m)) \in (\mathbb{C}^*)^m$. Ceci indique que l'application $v : \widehat{G} \to (\mathbb{C}^*)^m$, $f \mapsto v(f)$ est bijective, et la définition du produit dans le groupe $\widehat{G}$ fait que c'est un isomorphisme de groupes.

4.(a) D'après V.1.(c), tout élément de $\mathcal{A}$ s'écrit de manière unique $v = \sum_{i=1}^k \lambda_i z^{l_i}$ où les l_i sont
$\boxed{1}$ distincts et les λ_i non nuls. Posons $\sigma_f(v) = \sum_{i=1}^k f(l_i)\lambda_i z^{l_i}$. On voit que σ_f envoie z^l sur $f(l)z^l$, qu'il est $\mathbb{C}$-linéaire et inversible d'inverse $\sigma_{f^{-1}}$. Par ailleurs $\sigma_f(1) = f(0) = 1$. Il reste à voir
$\boxed{1}$ que σ_f est multiplicatif. Par $\mathbb{C}$-linéarité, il suffit de montrer que $\sigma_f(z^l z^m) = \sigma_f(z^l)\sigma_f(z^m)$. Or $\sigma_f(z^l z^m) = \sigma_f(z^{l+m}) = f(l+m)z^{l+m} = f(l)f(m)z^{l+m} = \sigma_f(z^l)\sigma_f(z^m)$.

4.(b) Soit $\sigma \in \mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{A})$. Dans la question 1.(b), on a montré qu'il existe $c_l \in \mathbb{C}^*$ tel que $\sigma(z^l) = c_l z^l$ et que $c : L \to \mathbb{C}^*$, $l \mapsto c_l$ transforme l'addition de L en la multiplication de $\mathbb{C}^*$, c'est-à-dire que c est un morphisme de monoïdes. Comme $G = L - L = \{l_1 - l_2\}$, il y a une unique
$\boxed{1}$ manière d'étendre c en un morphisme de groupes $f : G \to \mathbb{C}^*$, en posant $f(l_1 - l_2) = c_{l_1} c_{l_2}^{-1}$. En effet, f est bien défini car si $l_1 - l_2 = m_1 - m_2$ alors $l_1 + m_2 = m_1 + l_2$ donc $c_{l_1} c_{m_2} = c_{m_1} c_{l_2}$ puis $f(l_1 - l_2) = c_{l_1} c_{l_2}^{-1} = c_{m_1} c_{m_2}^{-1}$. À ce caractère f est attaché un automorphisme σ_f d'après 4.(a). Comme σ et σ_f prennent la même valeur en les z^l, $l \in L$, l'unicité de 4.(a) montre que $\sigma = \sigma_f$.
$\boxed{1}$ Ainsi le morphisme de groupes $\widehat{G} \to \mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{A})$, $f \mapsto \sigma_f$, injectif d'après 4.(a), est également surjectif donc un isomorphisme.

5. Soient $f \in \widehat{G}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Il leur est associé un unique $\sigma \in \mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{A}')$ tel que $\sigma(z^l) = f(l)z^l$ pour tout $l \in L$ et $\sigma(\log) = \log + \lambda$. Nous devons décrire explicitement la matrice $M_\sigma = z^{-A}\sigma(z^A)$. Dans les calculs qui vont suivre, toutes les matrices qui apparaitront sont des polynômes en A et donc commutent entre elles. Le résultat sera formulé en termes de la décomposition de Dunford $A = S + N$, grâce aux faits que $z^A = z^S z^N$ et $\sigma(z^A) = \sigma(z^S)\sigma(z^N)$. D'une part, on prend une diagonalisation $S = P\,\mathrm{Diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)P^{-1}$ et on invoque encore I.2 pour calculer $z^S = \exp((\log z)S) = P\,\mathrm{Diag}(z^{\alpha_1}, \ldots, z^{\alpha_n})P^{-1}$. Puisque P est constante
$\boxed{1}$ (indépendante de z), on a $\sigma(P) = P$ donc $\sigma(z^S) = P\,\mathrm{Diag}(f(\alpha_1)z^{\alpha_1}, \ldots, f(\alpha_n)z^{\alpha_n})P^{-1} = P\,\mathrm{Diag}(f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_n))P^{-1}S = f(S)z^S$ où $f(S)$ est la notation introduite en II.4.(a) et
$\boxed{1}$ II.4.(b). D'autre part, on calcule $z^N = \exp((\log z)N) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{k!}(\log z)^k N^k$ puis $\sigma(z^N) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{k!}(\log z + \lambda)^k N^k = \exp((\log z + \lambda)N) = \exp((\log z)N + \lambda N) = z^N \exp(\lambda N)$. Joignant ces calculs on obtient $M_\sigma = z^{-S}\sigma(z^S) \cdot z^{-N}\sigma(z^N) = f(S)\exp(\lambda N)$ qui est naturellement sous forme
$\boxed{1}$ TU i.e. diagonalisable $\times$ unipotente. La représentation ρ''_A est donc $(f, \lambda) \mapsto f(S)\exp(\lambda N)$.

6. Rappelons-nous (IV.7.(b)) que $\rho_A(1) = \exp(2i\pi A) = \exp(2i\pi S)\exp(2i\pi N)$. Soient $f_0 \in \widehat{G}$,
$\boxed{1}$ $f_0(x) := \exp(2i\pi x)$ et $\lambda_0 := 2i\pi$. On voit que si l'on pose $\varphi(1) = (f_0, \lambda_0)$, d'après la question
précédente on a $\rho''_A(\varphi(1)) = \rho''_A(f_0, \lambda_0) = \rho_A(1)$. Comme 1 engendre $\mathbb{Z}$, ceci suffit à montrer que
$\varphi : k \mapsto (f_0^k, k\lambda_0)$ est un morphisme de groupes tel que $\rho''_A \circ \varphi = \rho_A$.