Feuille 2

Exercice 1. Séries de Hardy. Donner la nature de la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}\sin(\pi\sqrt{n})$ lorsque :

1. $\alpha > 1$ (facile)
2. $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ (comparaison série - intégrale et intégration par parties)
3. $\alpha = \frac{1}{2}$ (effectuer un développement asymptotique de $e^{i\pi\sqrt{n+1}} - e^{i\pi\sqrt{n}}$)
4. $\alpha < \frac{1}{2}$ (si cette série convergeait, alors celle pour $\alpha = \frac{1}{2}$ convergerait par une transformation d'Abel)

Exercice 2. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière à coefficients dans $\mathbb{R}$.

1. Rappeler la définition du rayon de convergence $R \in [0, +\infty]$.
2. Règle de d'Alembert : montrer que si $|a_{n+1}|/|a_n|$ converge vers l, alors $R = 1/l$.
3. Formule de Cauchy-Hadamard : montrer que R est l'inverse de $\limsup_n |a_n|^{1/n}$.

Exercice 3. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in]0, +\infty[$.
On suppose que la série $\sum a_n R^n$ converge.

1. Montrer que la série $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur $[0, R]$.
2. En déduire que $\sum a_n R^n = \lim_{x\to R} \sum a_n x^n$.
3. Donner la valeur des séries $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ et $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice 4. Théorème de Bieberbach (cas des coefficients réels)
Soit $(a_n)_n$ une suite de nombre réels et soit $f(z) = z + \sum_{n\geq 2} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence au moins égal à 1. On suppose que f est injective sur le disque unité ouvert $\mathbb{D}$.

1. Soit $z \in \mathbb{D}$. Montrer que $f(z) \in \mathbb{R}$ si et seulement si $z \in \mathbb{R}$.
2. En déduire que si $\Im(z) > 0$ alors $\Im(f(z)) > 0$.
3. Soit $r \in [0, 1[$ et soit $n \geq 1$. Calculer $\int_0^\pi \Im f(re^{i\theta}) \sin(n\theta)\, d\theta$.
4. En déduire que $|a_n| \leq n$.
5. En considérant $g(z) = \sum_{n\geq 1} nz^n$, montrer que la majoration de la question 4 est optimale.