Exercices : Topologie matricielle

Le corps K est l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1. Soit $P \in K[x_1, \dots, x_m]$.

1. Soit U un ouvert de K^m. Montrer que si P est nul sur U alors P est le polynôme nul.
2. On suppose que P n'est pas le polynôme nul. Montrer que $\{P \neq 0\}$ est un ouvert dense de K^m, connexe par arc lorsque $K = \mathbb{C}$. Retrouver que $GL_n(K)$ est dense dans $M_n(K)$.

Exercice 2. Soit F un sous-espace vectoriel de $M_n(K)$. Montrer que si F contient une matrice inversible (notée A) alors $F \cap GL_n(K)$ est dense dans F.

Indication : pour tout $M \in F$, considérer le polynôme $P(x) = \det(M + xA)$.

Exercice 3. Soit G un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ et soit $A \in G$. Montrer que toute valeur propre de A est de module 1 et que $|\det A| = 1$.

Exercice 4. Soit G un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ contenant $O_n(\mathbb{R})$. Montrer que $G = O_n(\mathbb{R})$ (ainsi $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact maximal de $GL_n(\mathbb{R})$). Enoncer un résultat analogue sur $\mathbb{C}$.

Indication : utiliser la décomposition polaire.

Exercice 5. Il existe un voisinage V de I_n dans $GL_n(K)$ tel que : si G est un sous-groupe de $GL_n(K)$ contenu dans V alors $G = \{I_n\}$ (ainsi il n'existe pas de sous-groupe de $GL_n(K)$ arbitrairement petit).

Indication : utiliser l'application exponentielle.

Exercice 6. Soit $\psi : \mathbb{R} \to GL_n(\mathbb{R})$ un morphisme de groupe qui est continu (on dit que ψ est un groupe à un paramètre). Montrer qu'il existe $A \in M_n(\mathbb{R})$ tel que $\psi(t) = \exp(tA)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 7. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable. Montrer de manière très élémentaire qu'elle annule son polynôme caractéristique. En déduire le théorème de Cayley-Hamilton sur $M_n(\mathbb{C})$.

Exercice 8. Soit $p \in \{0, \dots, n-1\}$. Soit A_p l'ensemble des matrices de rang p dans $M_n(K)$.

1. Montrer que A_p est d'intérieur vide.
2. Montrer que l'adhérence de A_p est l'ensemble des matrices de rang inférieur ou égal à p.

Exercice 9. On rappelle qu'une matrice $A \in M_n(K)$ est cyclique s'il existe $u \in K^n$ tel que l'ensemble des vecteurs $\{u, A(u), \ldots, A^{n-1}(u)\}$ est une base de K^n. Cette propriété est équivalente au fait que le polynôme minimal de A est égal (au signe près) au polynôme caractéristique de A. La preuve n'est pas immédiate, elle utilise en particulier le lemme de décomposition des noyaux. Ainsi une matrice A est cyclique si et seulement si $\{I_n, A, \ldots, A^{n-1}\}$ est une famille libre de $M_n(K)$. Les matrices cycliques sont les blocs qui apparaissent dans la réduction de Frobenius. On note C l'ensemble des matrices cycliques.

Indication pour les questions : commencer avec $n = 2$ et écrire dans l'espace $M_2(K)$ la matrice des vecteurs I_2, $M = [a_{ij}]$ dans la base canonique E_{ij}, c'est une matrice à 2 colonnes et 4 lignes.

1. C est un ouvert de $M_n(K)$: par deux méthodes, dont l'une utilise la semi-continuité du rang.
2. C est dense dans $M_n(K)$. Indication : établir $C = M_2(K) \setminus \cap_{k=1}^{4} \{P_k = 0\}$, où l'un au moins des P_k n'est pas le polynôme nul. Terminer en dimension n.
3. C est connexe par arcs lorsque $K = \mathbb{C}$.

Exercice 10. Soit $A \in M_n(K)$. Montrer que

$$\mathcal{C}(A) := \{B \in M_n(K)\,,\, AB = BA\}$$

est un sous-espace vectoriel de $M_n(K)$ de dimension au moins n.

Indication : commencer par le cas où A est cyclique. Ainsi, d'après l'exercice précédent, la dimension de $\mathcal{C}(A)$ est plus grande ou égale à n pour un sous-ensemble dense de matrices. Montrer enfin que cette propriété est fermée dans $M_n(K)$.