Compléments d'Analyse

Préparation Agrégation de Mathématiques
Université de Rennes 1
Isabelle Gruais

19 septembre 2019

1 Analyse Numérique matricielle

1.1 Préliminaires : Normes matricielles

Définition et premières propriétés

Proposition 1.1.1. *Soit $A \in \mathbb{C}^{M\times N}$ une matrice rectangulaire à M lignes et N colonnes. On munit $E = \mathbb{C}^N$ et $F = \mathbb{C}^M$ de normes notées $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ resp.*

1. *La quantité suivante est finie :*

$$\|A\| = \max_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|_F < +\infty$$

2. *La borne supérieure qui définit $\|A\|$ est atteinte.*
3. *On a les égalités :*

$$\|A\| = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|_F = \max_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|_F.$$

Démonstration. 1. La quantité $\|A\|$ est bien définie comme borne supérieure atteinte de l'application linéaire continue $x \mapsto Ax$ sur la boule unité fermée de E qui est compacte.

2. L'application $x \mapsto \dfrac{1}{\|x\|}x$ est une bijection de $E \setminus \{0\}$ sur la sphère unité $S_E = \{x \in E,\ \|x\| = 1\}$ de E. Donc, par linéarité de $x \mapsto Ax$:
$$\sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x\neq 0} \left\| A\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right)\right\|_F = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|_F = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|_F.$$
On remarque que
$$\max_{\|x\|=1} \|Ax\|_F \leq \max_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|_F.$$
On suppose que $\max_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|_F$ est atteint pour $x_0 \in E$ t.q. $\|x_0\| = r < 1$. Alors
$$\|A\left(\frac{1}{r}x\right)\|_F = \frac{1}{r}\|Ax\| > \|Ax\|,$$
et $\left\|\dfrac{1}{r}x\right\|_E = 1$; Contradiction.

□

Proposition 1.1.2. *L'application $A \mapsto \|A\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^{M\times N}$.*

Démonstration. 1. Soit $\|A\| = 0$. Alors $Ax = 0$, $\forall x \in E \setminus \{0\}$, i.e. $Ax = 0$, $\forall x \in E \setminus \{0\}$ par linéarité de A. Donc $A = 0$.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $A \in \mathbb{R}^{M\times N}$. On a
$$\|\lambda A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|\lambda Ax\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x\neq 0} \frac{|\lambda|\|Ax\|_F}{\|x\|_E} = |\lambda| \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} = |\lambda|\|A\|.$$

3. Soit $A \in \mathbb{C}^{M\times N}$ et soit $B \in \mathbb{C}^{M\times N}$. On a : $\forall x \in E\setminus\{0\}$, $\|(A+B)x\|_F = \|Ax + Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\|$ donc
$$\frac{\|(A+B)x\|_F}{\|x\|_E} \leq \frac{\|Ax\|}{\|x\|_E} + \frac{\|Bx\|}{\|x\|_E} \leq \|A\| + \|B\|.$$
Par définition de la borne supérieure comme plus petit majorant, on en déduit : $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

□

Définition 1.1.1 (Norme induite)**.** On appelle norme matricielle induite l'application : $\mathbb{C}^{M\times N} \to \mathbb{R}^+$,
$$A \mapsto \|A\| = \max_{\|x\|_E=1} \|Ax\|_F = \max_{\|x\|_E\leq 1} \|Ax\|_F = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E}.$$

Lemme 1.1.3. *Pour toute norme matrcielle induite :* $\forall A \in \mathbb{C}^{M\times N}$, $\forall x \in\in E$,

$$\|Ax\|_F \leq \|A\|\|x\|_E.$$

Démonstration. Soit $A \in \mathbb{C}^{M\times N}$ et soit $x \in E$. Si $x = 0$, c'est immédiat. On suppose $x \neq 0$. Par définition de la norme induite : $\dfrac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} \leq \|A\|$ et $\|x\|_E > 0 \Rightarrow \|Ax\|_F \leq \|A\|\|x\|_E$. □

Proposition 1.1.4. *Soit* $A \in \mathbb{C}^{M\times N}$ *et soit* $B \in \mathbb{C}^{N\times P}$*. On pose* $E = \mathbb{R}^N$, $F = \mathbb{R}^M$, $G = \mathbb{R}^P$*. Alors, pour toute norme induite :*

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$$

Démonstration. Soit $x \in G \setminus \{0\}$. On a

$$\|ABx\|_F = \|A(Bx)\|_F \leq \|A\|\|Bx\|_E \leq \|A\|\|B\|\|x\|_G,$$

donc

$$\frac{\|ABx\|_F}{\|\|x\|_G} \leq \|A\|\|B\|.$$

On conclut par définition de la borne supérieure comme plus petit majorant. □

Cas particuliers importants

Proposition 1.1.5. *Si* $\mathbb{C}^N$ *est muni de la norme hermitienne* $x \mapsto \|x\|_2 = \sqrt{x^*x}$ *dérivée du produit hermitien* $(x, y) \mapsto y^*x =: x \cdot y$*, resp des normes* $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$*. Alors la norme matricielle induite est donnée par :* $\forall A \in \mathbb{C}^{N\times N}$,

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)},$$

resp. :

$$\|A\|_\infty = max_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |a_{ij}|$$

$$\|A\|_1 = \max_{j=1}^N \sum_{i=1}^N |a_{ij}|$$

Démonstration. 1. On a : $\forall x \in E$, $\|Ax\|_2^2 = A^*Ax \cdot x$ avec A^*A hermitienne, donc diagonalisable dans une base orthonormée : $\exists U \in \mathbb{C}^{N\times N}$

unitaire ($U^*U = U^{-1}$) et $D \in \mathbb{C}^{N\times N}$ diagonale, d'éléments diagonaux $\alpha_i^2 \in \mathbb{R}^+$, t.q. $A = U^*DU$. Il en résulte

$$\|Ax\|_2^2 = A^*Ax \cdot x = U^*DUx \cdot x = DUx \cdot Ux \leq \rho(D)\|Ux\|_2^2 =$$

$$= \rho(A^*A)\|x\|_2^2,$$

d'où on déduit : $\|A\|_2 \leq \sqrt{\rho(A^*A)}$. Soit i_0 t.q.

$$|\alpha_{i_0}| = \max_{i=1}^{N} |\alpha_i| = \sqrt{\rho(A^*A)}.$$

et soit $u \in \mathbb{C}^N$ un vecteur propre associé : $A^*Au = |\alpha_{i_0}|^2 u$. Alors

$$\|Au\|_2^2 = A^*Au \cdot u = |\alpha_{i_0}|^2\|u\|_2^2 = \rho(A^*A)\|u\|_2^2$$

donc

$$\frac{\|Au\|_2}{\|u\|_2} = \sqrt{\rho(A^*A)} \Rightarrow \|A\|_2 \geq \sqrt{\rho(A^*A)}.$$

2. Soit $x \in \mathbb{C}^N$. On a : $\forall i \in [[1, N]]$,

$$|(Ax)_i| = |\sum_{j=1}^{N} a_{ij}x_j| \leq \max_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} |a_{ij}|.$$

Soit i_0 t.q. $\sum_{j=1}^N |a_{i_0 j}|. = \max_{i=1}^N (\sum_{j=1}^N |a_{ij}|)$ et soit $y \in \mathbb{C}^N$ défini par :

$$y_j = \begin{cases} a_{i_0 j}|a_{i_0 j}|^{-1} & \text{si} \quad a_{i_0 j} \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad a_{i_0 j} = 0, \end{cases}$$

Alors

$$|(Ay)_{i_0}| = \sum_{j=1}^{N} |a_{i_0 j}|.$$

3. Soit $x \in \mathbb{C}^N$. On a :

$$\|Ax\|_1 \leq \sum_{i,j=1}^{N} |a_{ij}||x_j| \leq \max_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} |a_{ij}|.$$

Soit j_0 t.q. $\sum_{i=1}^N |a_{ij_0}| = \max_{j=1}^N \sum_{i=1}^N |a_{ij}|$ et soit $y \in \mathbb{C}^N$ défini par $y_i = \delta_{ij_0}$. Alors $\|Ay\|_1 = \sum_{i=1} |a_{ij_0}|$.

$\square$

Corollaire 1.1.6. *Si $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ est symétrique $\|A\|_2 = \rho(A)$.*

Proposition 1.1.7. *Soit $\varepsilon > 0$ et soit $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$. Il existe une norme induite $\|\cdot\|_\varepsilon$ t.q. : $\rho(A) \le \|A\|_\varepsilon \le \rho(A)+\varepsilon$.*

Démonstration. Soit $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ et soit $x \in \mathbb{C}^N$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. On a $\|Ax\|_2 = |\lambda|\|x\|_2 \Rightarrow \|A\| \ge |\lambda|$. Ceci étant vrai pour toute valeur propre de A, on en déduit $\|Ax\| \ge \rho(A)$.

Soit $A = P^{-1}BP$ la factorisation de Jordan de A dans $\mathbb{C}^{N\times N}$: $B = \Lambda + U$ où Λ est la matrice diagonale formée des valeurs propres de A et U est triangulaire supérieure de diagonale nulle. Soit $\delta > 0$ et soit $D \in \mathbb{R}^{N\times N}$ la matrice diagonale définie par : $d_{ij} = \delta^{-i+1}\delta_{ij}$, $i,j \in [[1,N]]$. On pose : $C = DBD^{-1} = \Lambda + DUD^{-1} =: \Lambda + E$. On a $E_{ij} = \delta^{j-i}u_{ij}$, $\forall j > i$, et donc $\|E\|_2 = \mathcal{O}(\delta)$. On peut choisir $\delta > 0$ t.q. $\|E\|_2 \le \varepsilon$. On considère la norme vectorielle $\|x\|_\varepsilon = \|DPx\|_2$. Alors, la norme matricielle associée vérifie :

$$\|A\|_\varepsilon = \|\Lambda + E\|_2 \le \rho(A) + \varepsilon.$$

□

1.2 Conditionnement d'une matrice

Définition 1.2.1. Le conditionnement d'une matrice inversible $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ associé à la norme induite $\|\cdot\|$ est la quantité :

$$\mathrm{cond}(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$$

Le conditionnment d'une matrice A caractérise la sensibilité du système $Ax = b$ par rapport aux erreurs sur les données A, b.

Remarque 1. On a : $\forall A \in \mathbb{C}^{N\times N}$,

$$\|I\| = 1 = \|AA^{-1}\| \le \|A\|\|A^{-1}\| = cond(A).$$

Exemple 1. Soit $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ définie par

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad i = j, \\ -1 & \text{si} \quad |i-j| = 1, \\ 0 & \text{si} \quad |i-j| > 1, \end{cases}$$

Comme A est symétrique réelle, elle est diagonalisable, de valeurs propres $\lambda_1 \le \cdots \le \lambda_N$ et le conditionnement de A relativement à la norme euclidienne de $\mathbb{R}^N$ est $cond_2(A) = \dfrac{|\lambda_N|}{|\lambda_1|}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valur propre de A et soit $x \neq 0$ un vecteur propre associé. Alors

$$Ax = \lambda x \iff x_{i+1} + (\lambda - 2)x_i + x_{i-1} = 0, \quad i \in [[1, N]], \quad x_0 = x_{N+1} = 0.$$

Les coordonnées de x sont solutions d'une équation récurrente d'équation caractéristique $r^2 + (\lambda - 2)r + 1 = 0$. On vérifie que les solutions non nulles sont obtenues pour $|\lambda - 2| \leq 2$, ce qui correspond au changement de variable $\lambda = 2 - 2\cos\theta$. Des contraintes $x0 = x_{N+1} = 0$, on déduit que les valeurs admissibles de θ sont $\theta = \dfrac{k\pi}{N+1}$, $k \in [[1, N]]$, puis que les valeurs propres de A sont les réels $\lambda_k = 4\sin\left(\frac{k\pi}{2(N+1)}\right)^2$, $k \in [[1, N]]$. On en déduit :

$$cond(A) = \left(\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2(N+1)}\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2(N+1)}\right)} \right)^2 \sim \left(\frac{2(N+1)}{\pi}\right)^2$$

Proposition 1.2.1. *Soit $x \in \mathbb{R}^N$ solution de $Ax = b$.*

1. *Soit $x' = x + \delta x$ la solution du système modifié : $Ax' = b + \delta b$. Alors*
$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq cond(A)\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}. \tag{1}$$

2. *Soit $x'' = x + \delta x$ la solution du système modifié : $(A + \delta A)x'' = b$. Alors*
$$\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \leq cond(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}. \tag{2}$$

Démonstration.
1. Des égalités : $Ax = b$ et $A\delta x = \delta b$ et du Lemme 1.1.3, on déduit : $\|\delta x\| \leq \|A^{-1}\|\|\delta b\|$ et $\|b\| \leq \|A\|\|x\|$, puis (1).
2. De l'égalité : $\delta A x + \delta x) = -A\delta x$ et du Lemme 1.1.3, on déduit : $\|\delta x\| \leq \|A^{-1}\|\|\delta A\|\|x + \delta x\|$, i.e. (2) :
$$\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \leq \|A^{-1}\|\|\delta A\| = cond(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|},$$

□

Lemme 1.2.2. *Soit $B \in \mathbb{C}^{N\times N}$ t.q. $\|B\| < 1$. Alors, $(I - B)$ est inversible, d'inverse :*
$$(I - B)^{-1} = \sum_{n\geq 0} B^n. \tag{3}$$

De plus, il existe une norme induite pour laquelle on a l'estimation :

$$\|(I-B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|B\|}.$$

Démonstration. De la formule :

$$(I-B)(\sum_{n=0}^{k} B^n) = I - B^{k+1}, \quad \forall k \geq 0,$$

on déduit que, pour une norme induite $\|\cdot\|$ satisfaisant la Proposition 1.1.7

$$\|(I-B)(\sum_{n=0}^{k} B^n) - I)\| \leq \|B\|^{k+1}$$

d'où $\lim_{k\to+\infty} \|(I-B)(\sum_{n=0}^{k} B^n) - I\| = 0$ car $\|B\| < 1$ d'après l'hypothèse sur B. On remarque de plus que la série de matrices $\sum B^n$ est normalement convergente donc convergente. Il en résulte que la somme vérifie : $(I - B)(\sum_{n\geq 0} B^n) = I$, i.e. $I-B$ est inversible d'inverse donnée par (3). D'autre part :

$$\|(I-B)^{-1}\| \leq \sum_{n\geq 0} \|B\|^n = \frac{1}{1-\|B\|}.$$

□

Corollaire 1.2.3. *Soit $x \in \mathbb{C}^N$ solution de $Ax = b$ et soit $x'' = x + \delta x$ la solution du système modifié : $(A+\delta A)x'' = b$. Alors : si $\|\delta A\| < \|A^{-1}\|^{-1}$, alors*

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{cond(A)\dfrac{\|\delta A\|}{\|A\|}}{1 - cond(A)\dfrac{\|\delta A\|}{\|A\|}}$$

Démonstration. On a l'égalité

$$(A+\delta A)\delta x = -\delta A\, x \tag{4}$$

avec $A + \delta A = A(I + A^{-1}\delta A)$ avec $\|A^{-1}\delta A\| \leq \|A^{-1}\|\|\delta A\| < 1$ dpar hypothèse sur δA. On en déduit que $I + A^{-1}\delta A$ est inversible et son inverse vérifie estimation :

$$\|(I + A^{-1}\delta A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A^{-1}\|\|\delta A\|}.$$

Il en résulte que $A + \delta A = A(I + A^{-1}\delta A)^{-1})$ est inversble comme produit de matrices inversibles, d'inverse $(I + A^{-1}\delta A)^{-1})A^{-1}$ vérifiant :

$$\|(A+\delta A)^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1-\|A^{-1}\|\|\delta A\|}. \tag{5}$$

De (4) et (5), on déduit que

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|\delta A\|\|}{1-\|A^{-1}\|\|\delta A\|} = \frac{cond(A)\dfrac{\|\delta A\|}{\|A\|}}{1-cond(A)\dfrac{\|\delta A\|}{\|A\|}}.$$

□

1.3 Méthodes directes

Lorsqu'un système $Ax = b$ est mal conditionné, on le remplace par un système équivalent ou approchant. La méthode de résolution est alors dite directe ou itérative.

Définition 1.3.1 (Méthode directe)**.** Une méthode de résolution est dite directe quand elle substitue au système $Ax = b$ le système équivalent :

$$A_i y_i = y_{i-1}, \quad i = 1, \cdots, d; \quad y_0 = b. \tag{6}$$

Alors, la solution cherchée est $x = y_d$.

Remarque 2. Le schéma numérique est intéressant dans la mesure où il substitue à un système mal conditionné un ensemble de systèmes faciles à implémenter ou à évaluer, tels que les systèmes associés à des matrices triangulaires.

Proposition 1.3.1 (Factorisation LU)**.** *On dit qu'une matrice inversible $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ se factorise sous la forme $A = LU$ s'il existe une matrice triangulaire inférieure L à diagonale unité et une matrice triangulaire supérieure U t.q. $A = LU$.*

Exemple 2. Soit $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ tridiagonale, i.e. de la forme :

$$a_{ij} = \begin{cases} a_i & \text{si} \quad i = j, \\ b_i & \text{si} \quad j = i+1, \\ c_i & \text{si} \quad j = i-1, \\ 0 & \text{si} \quad |i-j| > 1, \end{cases}$$

Si $a_i \neq c_i b_{i-1}$, $\forall i \in [[2, N]]$ et si $a_1 \neq 0$, alors A est factorisable sous la forme $A = LU$ avec :

$$\ell_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j, \\ \ell_i & \text{si} \quad j = i - 1, \\ 0 & \text{sinon} \quad , \end{cases}$$

$$u_{ij} = \begin{cases} u_i & \text{si} \quad i = j, \\ v_i & \text{si} \quad j = i + 1, \\ 0 & \text{sinon} \quad , \end{cases}$$

et $v_i = b_i$, $i \in [[1, N]]$,

$$u_1 = a_1, \quad \ell_i = \frac{c_i}{u_{i-1}}, \quad u_i = a_i - \ell_i b_{i-1}, \quad i = 2, \cdots, N.$$

Proposition 1.3.2. *Une condition nécessaire et suffisante pour que A se factorise sous la forme LU est que*

$$det(A_i) \neq 0 \quad o\grave{u} \quad A_i = (a_{k\ell})_{k,\ell=1,\cdots,i}$$

1.4 Méthodes itératives

Définition 1.4.1. Une méthode est dite itérative si elle substitue à la résolution directe du système $Ax = b$ la construction d'une suite $(x_n)_{n\geq}$ convergente vers la solution x de $Ax = b$ et satisfaisant la récurrence : $x_{n+1} = Bx_n + c$ où les données $B \in \mathbb{C}^{d\times d}$ et $c \in \mathbb{C}^d$ sont définies à partir d'une décompostion de A sous la forme $A = M - N$ avec $M \in \mathbb{C}^{d\times d}$ inversible par les relations : $B = M^{-1}N$, $c = M^{-1}b$.

Proposition 1.4.1. *Soit $B \in \mathbb{C}^{d\times d}$ inversible et soit $c \in \mathbb{C}^d$. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par la récurrence :*

$$x_{n+1} = Bx_n + c. \tag{7}$$

Si $\rho(B) < 1$, alors, la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers une limite $x \in \mathbb{C}^d$, solution unique de $(I - B)x = c$. L'ordre de convergence de la méthode est déterminé par l'erreur :

$$\|x - x_n\| \leq \frac{\|B\|^n}{1 - \|B\|}, \quad \forall n \geq 0. \tag{8}$$

Démonstration. Bien que la méthode rentre dans le cadre plus général des méthodes de point fixe, on peut raisonner directement en tirant profit des propriétés topologiques des evns de dimension finie.

1. La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}^d$. En effet :

$$x_{n+1} - x_n = B(x_n - x_{n-1}) = B^n(x_1 - x_0), \quad \forall n \geq 0,$$

donc, pour toute norme induite $\|\cdot\|$: :

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq \sum_{k=0}^{p-1} \|x_{n+k+1} - x_{n+k}\| \leq \sum_{k=0}^{p-1} \|B\|^{n+k} \|x_1 - x_0\|.$$

Soit $\varepsilon > 0$ t.q. $0 < \rho(B) < 1 - \varepsilon < 1$ et soit $\|\cdot\|_\varepsilon$ une norme induite t.q. $\|B\|_\varepsilon < \rho(B) + \varepsilon < 1$. Pour simplifier les notations, on note encore $\|\cdot\|$ cette norme induite. On a alors :

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq \frac{\|B\|^n(1 - \|B\|^p)}{(1 - \|B\|)} \leq \frac{\|B\|^n}{(1 - \|B\|)}$$

On en déduit que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}^d$, donc convegente. Soit $x \in \mathbb{C}^d$ sa limite.

2. De ce qui précède, on déduit que

$$\limsup_{p\to+\infty} \|x_{n+p} - x_n\| \leq \frac{\|B\|^n}{(1 - \|B\|)}, \quad \forall n \geq 0,$$

i.e. (8) par définition de x.

□

Proposition 1.4.2. *Soit $A \in \mathbb{C}^{d\times d}$ inversible et soit $b \in \mathbb{C}^d$. On suppose que A se décompose sous la forme : $A = M - N$ avec $M \in \mathbb{C}^{d\times d}$ inversible et on définit la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ par la récurrence :*

$$Mx_{n+1} = Nx_n + b, \quad x_0 \in \mathbb{C}^d \quad \textit{arbitraire.}$$

Si $\rho(M^{-1}N) < 1$, alors la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers la solution de $Ax = b$.

Démonstration. On remarque que $Ax = b \iff Mx = Nx + b \iff x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$. et $Mx_{n+1} = Nx_n + b \iff x_{n+1} = M^{-1}Nx_n + M^{-1}b$. On conclut en posant $B = M^{-1}N$ et $c = M^{-1}b$ dans la Proposition 1.4.1. □

Théorème 1.4.3. *La méthode itérative (7) est consistante avec le système $Ax = b$ ssi $I - B$ est inversible et $c = (I - B)^{-1}A^{-1}b$. Si elle est consistante, elle converge ssi $\rho(B) < 1$.*

Démonstration. On suppose $\rho(B) < 1$. Soit $\varepsilon > 0$ t.q. $\rho(B) < 1 - \varepsilon$. De la Proposition 1.1.7, on déduit qu'il existe une norme induite $\| \cdot \|_\varepsilon$ t.q. $\rho(B) \leq \|B\|_\varepsilon \leq \rho(B) + \varepsilon < 1$. De la Proposition 1.4.1, on déduit que la méthode converge pour cette norme induite, donc converge par équivalence des normes sur $\mathbb{C}^d$. Inversement ; si la méthode converge, alors elle convege vers x solution de $(I - B)x = c$ qui admet une solution unique ssi $I - B$ est inversible, donc $\lim_{n\to+\infty} B^n = 0$. Soit x un vecteur propre de B associé à la valeur propre λ. Alors $B^n x = \lambda^n x$, donc $|\lambda| < 1$. □

2 Espaces de séries

2.1 Exponentielle de matrices

Sur le modèle de la série qui définit $(I - A)^{-1}$ si $\rho(A) < 1$, on définir l'exponentielle de matrice.

Proposition 2.1.1. *Pour tout $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$, la série $\sum \frac{A^n}{n!}$ est convergente vers une limite notée e^A et appelée exponentielle de la matrice A.*

Démonstration. Soit $\| \cdot \|$ une norme induite. On a : $\forall n, p \geq 0$,

$$\| \sum_{k=n}^{n+p} \frac{A^k}{k!} \| \leq \sum_{k=n}^{n+p} \frac{\|A\|^k}{k!}.$$

La série majorante $\displaystyle\sum_k \frac{\|A\|^k}{k!}$ étant convergente vers $e^{\|A\|}$, on déduit que les sommes partielles de la série de matrices $\displaystyle\sum \frac{A^k}{k!}$ forment une suite de Cauchy dans $\mathbb{C}^{N\times N}$ complet, donc que la série converge. □

Proposition 2.1.2. *Pour tout $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$, la fonction $t \mapsto e^{-tA}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{C}^N$, l'application $t \mapsto e^{-tA}x$ est la solution unique de l'équation différentielle :*

$$y' + Ay = 0, \quad y(0) = x. \tag{9}$$

Démonstration. Soit $a < b$. On a $\forall t \in [a, b]$, $\forall n \geq 0$,

$$\| \frac{(-t)^n A^n}{n!} \| \leq \frac{(|a| + |b|)^n \|A\|^n}{n!}$$

où la série majorante est convergente vers $e^{(|a|+|b|)\|A\|}$. On déduit du crit ere de Cauchy que la série de fonctions continues $t \mapsto \frac{(-t)^n A^n}{n!}$ est uniformément convergente sur le compact $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, donc que sa limite $t \mapsto e^{-tA}$ est continue sur le compact $[a,b]$. Ceci étant vrai sur tout compact $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, on en déduit que $t \mapsto e^{-tA}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

De plus, $t \mapsto \frac{(-t)^n A^n}{n!}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec : $\forall t \in [a,b]$, $\forall n \geq 0$,

$$\|(-1)^k n(n-1)\cdots(n-k+1)(-t)^{n-k}\frac{A^n}{n!}\| \leq$$

$$\leq n(n-1)\cdots(n-k+1)(|a|+|b|)^{n-k}\frac{\|A\|^n}{n!}$$

où la série majorante est convergente vers $\|A\|^k e^{(|a|+|b|)\|A\|}$. On déduit du critère de Cauchy que la série de fonctions continues

$$t \mapsto (-1)^k n(n-1)\cdots(n-k+1)(-t)^{n-k}\frac{A^n}{n!}$$

est uniformément convergente sur le compact $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, donc que sa limite $t \mapsto (-1)^k A^k e^{-tA}$ est continue sur le compact $[a,b]$. Ceci étant vrai sur tout compact $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, on en déduit que $t \mapsto (-1)^k A^k e^{-tA}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Ceci étant vrai $\forall k \geq 0$, on en déduit que $t \mapsto e^{-tA}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, de dérivées : $t \mapsto (-1)^k A^k e^{-tA}$.

Soit $x \in \mathbb{C}^N$. De ce qui précède, on déduit que $t \mapsto e^{-tA}x$ est solution de (9). Cette solution est unique car $\|Ay - Az\| \leq \|A\|\|y-z\|$, $\forall y, z \in \mathbb{C}^N$, i.e. $y \mapsto Ay$ est Lipschitzienne de rapport $\|A\|$. $\square$

2.2 Espaces de Hilbert

Dans $\mathbb{R}^N$ et $\mathbb{C}^N$, toutes les normes sont équivalentes. Ce n'est plus le cas en général en dimension infinie.

Définition 2.2.1. 1. Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Une application $H \times H \to \mathbb{C}$, $(u,v) \mapsto \langle u, v\rangle$ est appelée un produit scalaire sur H si elle vérifie :

   a) $\langle u, u\rangle \geq 0$, $\forall u \in H$, et $\langle u, u\rangle = 0 \iff u = 0$.

   b) $\langle u_1 + u_2, v\rangle = \langle u_1, v\rangle + \langle u_2, v\rangle$, $\forall u_1, u_2, v \in H$,
   $\langle \lambda u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle$, $\forall u, v \in H$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$,

   c) $\overline{\langle u, v\rangle} = \langle v, u\rangle$, $\forall u, v \in H$.

2. Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Une application $H \times H \to \mathbb{R}$, $(u,v) \mapsto \langle u, v\rangle$ est appelée un produit scalaire sur H si elle vérifie :

a) $\langle u, u\rangle \geq 0$, $\forall u \in H$, et $\langle u, u\rangle = 0 \iff u = 0$.

b) $\langle u_1 + u_2, v\rangle = \langle u_1, v\rangle + \langle u_2, v\rangle$, $\forall u_1, u_2, v \in H$,
$\langle \ u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle$, $\forall u, v \in H$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

c) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$, $\forall u, v \in H$.

3. On dit que deux vecteurs $u, v \in H$ sont orthogonaux si $re(\langle u, v\rangle) = 0$.

Théorème 2.2.1. *Soit H un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(u, v) \mapsto \langle u, v\rangle$.*

1. L'application $H \to \mathbb{R}^+$, $u \mapsto \sqrt{\langle u, u\rangle}$ est une norme sur H. On note

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}, \quad \forall u \in H. \tag{10}$$

2. $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \iff u \perp v$.

3. $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$, $\forall u, v \in H$ (inégalité de Schwarz).

Démonstration. 1. On déduit des propriétés du produit scalaire $(u, v) \mapsto \langle u, v\rangle$ que $u \mapsto \sqrt{\langle u, u\rangle}$ est une norme sur H.

2. Par définition :

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \|v\|^2 = \|u\|^2 + 2\, re(\langle u, v\rangle) + \|v\|^2$$

donc $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \iff re(\langle u, v\rangle) = 0 \iff u \perp v$.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et soit $u, v \in H$. On a

$$\|u + \lambda v\|^2 = \|u\|^2 + |\lambda|^2\|v\|^2 + \overline{\lambda}\langle u, v\rangle + \lambda\langle v, u\rangle.$$

On pose $\langle u, v\rangle = re^{i\theta}$, $r \geq 0$, $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $\lambda = xe^{i\theta}$. Alors

$$\|u + \lambda v\|^2 = \|u\|^2 + 2xr + x^2\|v\|^2 \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+. \tag{11}$$

On en déduit que $4r^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2 \leq 0$, i.e. $r = |\langle u, v\rangle| \leq \|u\|^{\|}u\|$.

□

Définition 2.2.2 (Espace de Hilbert)**.** Si H est complet pour la norme (10), alors H est appelé un espace de Hilbert.

Définition 2.2.3 (Base de Hilbert)**.** Soit H un espace de Hilbert. Une famille $(e_i)_{i\in I}$ de vecteurs de H est appelée base de Hilbert si :

$$\forall v \in H, \quad (e_i \perp v, \quad \forall i \in I) \Rightarrow v = 0.$$

Si de plus la famille $(e_i)_{i\in I}$ vérifie : $\|e_i\| = 1$, $\forall i \in I$, et $e_i \perp e_j$, $\forall i \neq j$, alors la base est dite orthonormée.

Proposition 2.2.2. *Un espace de Hilbert est séparable ssi il admet une base dénombrable* $(e_n)_{n\geq 0}$.

Démonstration. $\Rightarrow$ Soit H séparable et soit $D = \{u_n,\ n \geq 0\} \subset H$ t.q. $\overline{D} = H$. Soit $v \in H$ t.q. $v \perp u_n$, $\forall n \geq 0$. Comme $\overline{D} = H$, il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ t.q. $\|v - u_{\varphi(n)}\| \to 0$. On en déduit $\|v\|^2 = re(\langle v, v\rangle) = \lim_{n\to+\infty} re(\langle v, u_{\varphi(n)}\rangle) = 0$, i.e ; $v = 0$. Donc $(u_n)_{n\geq 0}$ est une base dénombrable de H.

$\Leftarrow$ Soit $(e_n)_{n\geq 0}$ une base dénombrable de H et soit $v \in H$. Pour tout $n \geq 0$, on pose : $v_n = \sum_{k=0}^{n} \langle v, e_n\rangle e_n$. Par le procédé d'orthonormalisation de Gramm-Schmidt, on peut toujours supposer que $(e_n)_{n\geq 0}$ est orhonormée. On a $v = v_n + (v - v_n)$ avec

$$\langle v_n, v - v_n\rangle = \sum_{k=0}^{n} \langle v, e_n\rangle \overline{\langle v, e_n\rangle} - \|v_n\|^2 = 0.$$

donc $v_n \perp v - v_n$. On en déduit que $\|v\|^2 = \|v_n\|^2 + \|v - v_n\|^2 \geq \sum_{k=1}^{n} |\langle v, e_n\rangle|^2$. Donc la série $\sum |\langle v, e_n\rangle|^2$ est convergente. Par le critère de Cauchy dans H complet, la suite des sommes partielles $(v_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans H donc convergente vers $v' := \sum_{n\geq 0} \langle v, e_n\rangle e_n$. On a :$\forall n \geq 0$, $re(\langle v - v', e_n\rangle) = 0$ donc $v = v'$ car $(e_n)_{n\geq 0}$ est une base de Hilbert. En particulier :$\lim_{n\to+\infty} \|v - v_n\| = 0$, i.e. $\overline{D} = H$. □

Corollaire 2.2.3. *Soit H un espace de Hilbert séparable et soit $(e_n)_{n\geq 0}$ une base orthonormée de H. Alors :* $\lim_{n\to+\infty} \|u - \sum_{i=0}^{n} \langle u, e_i\rangle e_i\| = 0$ *et* $\|u\|^2 = \sum_{n\geq 0} |\langle u, e_n\rangle|^2$.

Réciproquement, $u_n = \sum_{i=0}^{n} a_i e_i \in H$ *a une limite* $u \in H$ *quand* $n \to +\infty$ *ssi* $\sum_{n\geq 0} |a_n|^2 < +\infty$ *et dans ce cas* $\|u\|^2 = \sum_{n\geq 0} |a_n|^2$.

Pour tout $u \in H$ *on écrit* $u = \sum_{n\geq 0} \langle u, e_n\rangle e_n$.

Exemple 3. L'espace $\mathbb{R}^N$ muni de la nome euclidienne est un espace de Hilbert de dimension finie.

Exemple 4. Soit $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'espace des suites réelles $u = (u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ t.q. $\sum_{n\geq 0} |u_n|^2 < \infty$ muni du produit scalaire : $(u, v) \mapsto \sum_{n\geq 0} u_n v_n$ est un espace de Hilbert. En effet, soit $(u^{(n)})_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 > 0$ t.q. : $\forall n \geq n_0$, $\forall p \geq 0$,

$$\|u^{(n)} - u^{(n+p)}\|^2 = \sum_{k\geq 0} |u_k^{(n)} - u_k^{(n+p)}|^2 < \varepsilon. \tag{12}$$

On en déduit que pour tout $k \geq 0$, la suite $(u_k^{(n)})_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, donc convergente vers une limite u_k. Avec les notations de (12), on déduit :

$$\lim_{p\to\infty} \sum_{k=0}^{N} |u_k^{(n)} - u_k^{(n+p)}|^2 = \sum_{k=0}^{N} |u_k^{(n)} - u_k|^2 \leq \varepsilon, \quad \forall N > 0, \quad \forall n \geq n_0.$$

On en déduit

$$\sum_{k\geq 0} |u_k^{(n)} - u_k|^2 \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

i.e. $u^{(n)} \to u$ dans $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$,

Exemple 5. On note $L^2(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de carré intégrable pour la mesure de Lebesgue. Par construction $L^2(\mathbb{R})$ est le complété de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ pour la norme : $f \mapsto \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f|^2 dx}$. Si $f \in L^2(\mathbb{R})$, f n'est pas continue en général. Pour tout $h \in \mathbb{R}$, on définit $\tau_h : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ en posant : $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$, $\tau_h f(x) = f(x+h)$ pout presque tout $x \in \mathbb{R}$. Alors $\|\tau_h f\|_2 = \|f\|_2$, $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$. Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ et soit $\varepsilon > 0$. Du théorème de convergence dominée, on déduit qu'il existe $R > 0$ t.q. $\int_{|x|>R} |f|^2 dx < \varepsilon^2$. Soit $\phi_\varepsilon \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ de support $\subset [-R, R]$ t.q. $\|f - \phi_\varepsilon\|_2 < \varepsilon$. Comme ϕ_ε est continue à support compact dans $\mathbb{R}$, ϕ_ε est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Il existe $\eta > 0$ t.q.

$$\forall h \in \mathbb{R}, \quad |h| < \eta \Rightarrow |\phi_\varepsilon(x+h) - \phi_\varepsilon(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Soit $|h| < \eta$. On a

$$\|\tau_h f - f\|_2 \leq \|\tau_h f - \tau_h \phi_\varepsilon\|_2 + \|\tau_h \phi_\varepsilon - \phi_\varepsilon\|_2 + \|\phi_\varepsilon - f\|_2 =$$

$$= 2\|f - \phi_\varepsilon\|_2 + \|\tau_h \phi_\varepsilon - \phi_\varepsilon\|_2 \leq 2(1+R)\varepsilon.$$

autrement dit : $\lim_{h\to 0} \|\tau_h f - f\|_2 = 0$, par densité de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$.

2.3 Normes d'opérateurs dans les espaces de Banach

Définition 2.3.1 (Opérateurs linéaires)**.** Un opérateur linéaire entre deux espaces de Banach E et F est une application linéaire $\mathcal{A} : E \to F$: vérifiant :

1. $\mathcal{A}(x+y) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y)$, $\forall x, y \in E$

2. $\mathcal{A}(\lambda x) = \lambda \mathcal{A}(x)$, $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 2.3.2 (Opérateur borné)**.** Un opérateur linéaire $\mathcal{A} : E \to F$ entre deux espaces de Banach est dit borné s'il existe $M > 0$ t.q. $\|\mathcal{A}(x)\|_F \leq M\|x\|_E$, $\forall x \in E$. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des opérateurs linéaires bornés de $E \to F$. Si $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(E, F)$, on définit sa norme par :

$$\|\mathcal{A}\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|\mathcal{A}(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|\mathcal{A}(x)\|_F = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\mathcal{A}(x)\|_F}{\|x\|_E}. \tag{13}$$

Proposition 2.3.1. *L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ des opráteurs linéaires bornés entre deux espaces de Banach E, F est un espace de Banach pour la norme (13).*

Démonstration. Soit $(\mathcal{A}_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{L}(E, F)$ une suite de Cauchy pour (13). Pour tout $x \in E$, $\|\mathcal{A}_{n+p}(x) - \mathcal{A}_n(x)\|_F \leq \|\mathcal{A}_{n+p} - \mathcal{A}_n\| \|x\|_E$, $\forall n, p \geq 0$. Donc la suite $(\mathcal{A}_n(x))_{n \geq 0}$ est de Cauchy dans F donc convergente. On pose $\mathcal{A}(x) = \lim_{n \to +\infty} \mathcal{A}_n(x)$. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $n_0 > 0$ t.q.

$$\|\mathcal{A}_{n+p} - \mathcal{A}_n\| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0, \quad \forall p \geq 0.$$

On a : $\forall n \geq n_0$,

$$\limsup_{p \to +\infty} \|\mathcal{A}_{n+p}(x) - \mathcal{A}_n(x)\|_F = \|\mathcal{A}(x) - \mathcal{A}_n(x)\|_F \leq \varepsilon \|x\|_E$$

Donc :

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|\mathcal{A}(x) - \mathcal{A}_n(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

□

En dimension infinie, il existe des opérateurs linéaires non bornés.

Théorème 2.3.2. *Un opérateur linéaire $\mathcal{A} : E \to F$ entre deux espaces de Banach est borné ssi il est continu i.e. ssi : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ t.q. $\forall x, y \in E$,*

$$\|x - y\|_E < \eta \Rightarrow \|\mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(y)\|_F < \varepsilon.$$

Démonstration. $\Rightarrow$ Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(E, F)$. ALors ; $\forall x, y \in E$, $\|\mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(y)\|_F \leq \|\mathcal{A}\| \|x - y\|_E < \varepsilon$ dès que $\|x - y\|_E < \varepsilon / \|\mathcal{A}\|$.

$\Leftarrow$ Soit $\mathcal{A} : E \to F$ linéaire continue. Par linéarité de $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ est continue ssi $\mathcal{A}$ est continue en 0. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\eta > 0$ t.q. $\|x\|_E \leq \eta \Rightarrow \mathcal{A}(x)\|_F \leq \varepsilon$. Soit $x \neq 0$. On a

$$\frac{\|\mathcal{A}(x)\|_F}{\|x\|_E} = \frac{\eta \|\mathcal{A}(x)\|_F}{\eta \|x\|_E} = \frac{1}{\eta} \left\| \mathcal{A}\left(\frac{\eta x}{\|x\|_E} \right) \right\|_F \leq \frac{\varepsilon}{\eta} =: M.$$

□

Les mêmes arguments que dans le cas des matrices permettent de montrer le résultat suivant.

Proposition 2.3.3. *Soit* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(E, E)$ *t.q.* $\|\mathcal{A}\| < 1$*. Alors* $I + \mathcal{A}$ *est inversible d'inverse donné par la série convergente*

$$(I + \mathcal{A})^{-1} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \mathcal{A}^n.$$

Plus généralement, soit $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(E, E)$ *inversible. Alors : pour tout* $B \in \mathcal{L}(E, E)$*, si* $\|B\| < \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}$*, alors* $\mathcal{A} + B$ *est inverible.*

Bibliographie

[1] J.P. Aubin, Analyse Fonctionnelle Appliquée, tomes 1 et 2, P.U.F., Paris, 1987.

[2] H. Brezis, Analyse fonctionnelle : théorie et applications, Masson, Paris, 1983.

[3] P. Ciarlet, Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisaion, Masson, Dunod, Paris.

[4] P. Lascaux, R. Théodor, Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur, Dunod, Paris.