

Groupes et géométrie

Table des matières

1	Formes et nombres : des grecs à Descartes	2
2	Quatre exemples	3
2.1	Principe des zéros isolés pour les polynômes	3
2.2	Cayley-Hamilton	4
2.3	Le cône nilpotent	5
2.4	L'espace des produits scalaires	7
2.5	Le groupe orthogonal	7
3	Topologies matricielles et actions de groupes	8
3.1	Topologies matricielles	8
3.2	Actions de groupes : définitions élémentaires	9
3.3	Actions de groupes : compléments topologiques	10
3.4	Critères d'homéomorphisme	10
3.5	Premiers exemples	11
4	Quelques espaces homogènes	11
4.1	Bases d'un espace vectoriel	11
4.2	Retour sur le cône nilpotent	12
4.3	Retour sur l'espace des produits scalaires	13
4.4	Retour sur le groupe orthogonal	17

Ces notes peuvent être utiles pour les leçons :

- 101 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
- 103 Conjugaison dans un groupe. Ex. de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Appl.
- 106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dim. finie E , sous-groupes de $GL(E)$. Applications.
- 108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.
- 150 Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.
- 155 Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.
- 156 Exponentielle de matrices. Applications.
- 157 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.
- 158 Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.
- 160 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).
- 170 Formes quadratiques sur un e.v. de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.
- 183 Utilisation des groupes en géométrie. (Absente du concours 2020)
- 191 Exemples d'utilisation des techniques d'algèbre en géométrie.

1 Formes et nombres : des grecs à Descartes

Les deux piliers des mathématiques grecques étaient la géométrie (dont les pères furent Thalès vers -600, Pythagore vers -500, Euclide vers -400) et l'arithmétique, aussi appelée théorie des nombres (Euclide, Diophante vers +300). Ceci signifie que les mathématiciens avaient identifié les *formes* et les *nombres* comme concepts centraux. Ces notions n'entretenaient cependant pas de relation étroite comme aujourd'hui ; un segment était vu exclusivement comme un objet géométrique, et l'idée de sa longueur comme nombre n'était pas de ce temps. L'éloignement prenait même le statut d'antagonie : pour Pythagore il n'y avait de nombre que les entiers et leurs fractions, et la légende dit que lorsqu'il fut établi que la diagonale du carré de côté 1 ne pouvait être un rationnel, un disciple de l'école pythagoricienne fut noyé pour avoir osé vouloir lui donner le statut de nombre.

Au fil de leur histoire, la géométrie et l'arithmétique ont emprunté des chemins tortueux qui s'étendent jusqu'à nos jours et que nous ne décrivons pas. Nous nous arrêterons simplement en un point où ces chemins se sont croisés : l'introduction par Descartes (1596-1650) des coordonnées qui portent son nom. Par cet acte révolutionnaire, Descartes montre que l'espace, un objet géométrique, peut être mis en bijection avec un ensemble de nombres (en fait un espace vectoriel réel de dimension 3). Cette idée a mené, avec le développement de l'algèbre de la fin du 19ème et du début du 20ème siècle, à baser la géométrie sur l'algèbre linéaire. Ceci étant, le choix d'un système de coordonnées introduit un arbitraire qui est encodé par un groupe – le groupe des changements de bases – dont il est crucial de contrôler l'action sur les objets géométriques étudiés, car on peut dire que « les propriétés intéressantes, c'est-à-dire géométriques, sont celles qui sont invariantes par changement de coordonnées : points singuliers, longueur, rayon de courbure... Et cela constitue presque une définition de ce qu'est une propriété géométrique, à savoir : indépendance à l'égard des coordonnées » (citation extraite de l'avant-propos de [CG17] ; nous avons librement remplacé le mot *paramétrage* par le mot *coordonnées*, ce qui ne dénature pas la citation).

Nous espérons que ces considérations historiques montrent comment géométrie, algèbre linéaire et groupes sont liés de manière importante et naturelle. Dans ce texte, nous étudierons donc les objets de l'algèbre linéaire vus comme objets géométriques, et les groupes qui agissent dessus.

∴

Avant de commencer, laissons la parole à Daniel Perrin. Selon [Pe96], la notion d'action « est une notion essentielle ! D'abord, c'est la situation que l'on rencontre dans toute géométrie (affine, avec le groupe affine, projective, euclidienne avec le groupe des isométries, hyperbolique avec le groupe de Lorentz etc), ensuite, parce qu'au-delà de l'intérêt de l'opération pour l'étude de l'ensemble X , elle permet souvent en retour d'obtenir des renseignements sur le groupe G ».

Le développement historique des concepts ne peut que renforcer ces propos : les premiers groupes sont apparus comme groupes d'automorphismes donc agissant naturellement sur des ensembles : permutations des racines de polynômes (Galois), permutation de n objets (Cauchy), transformations linéaires (Jordan), transformations continues d'espaces topologiques ou variétés (Lie)... Une fois dégagée la notion abstraite de groupe, un groupe ne naît pas nécessairement avec une action sur un ensemble X , mais pour l'étudier on le fait agir : théorèmes de Sylow, conjugaison et équation aux classes... La morale est qu'il faut penser au binôme groupe-ensemble

(G, X) , avec l'idée que l'étude de G donne des renseignements sur X et réciproquement. C'est ainsi que, selon [Pe96] encore : « nous appellerons « géométriques » les propriétés d'un élément de G relatives à une opération (points fixes...) par opposition aux propriétés « algébriques » (ordre d'un élément, commutation...) ».

2 Quatre exemples

Dans cette section nous examinons quatre exemples qui nous permettront de préciser l'état d'esprit dans lequel on peut se placer pour mettre en valeur le mieux possible les connaissances du programme de l'agrégation. L'exemple du § 2.2 nous montrera l'utilité de nous intéresser à la topologie. Dans les exemples des §§ 2.3 et 2.4, on s'intéressera à un ensemble sans qu'un groupe agissant dessus soit directement mentionné. Dans l'exemple du § 2.5, on s'intéressera à un groupe sans qu'un ensemble sur lequel il agit soit directement mentionné.

Dans les sections suivantes, nous ferons des rappels sur les actions de groupes sur des ensembles, puis reviendrons sur les exemples pour montrer comment ce cadre permet de mieux les comprendre.

2.1 Principe des zéros isolés pour les polynômes

On énonce ici un lemme utile qui est une version renforcée du principe des zéros isolés, dans le cas des polynômes sur un corps. On peut se reporter aux trois références suivantes :

- (i) Ramis et Warusfel [RW14], I.7.2, lemme 17 ;
- (ii) Goblot [Gob01], chapitre 6, § 6.1.2 et notamment Prop. 97 ;
- (iii) Malliavin [Ma84], chap. 1, § 3, cor. 3.4.

2.1.1 Lemme. *Soit K un corps infini. Soit $P \in K[X_1, \dots, X_n]$ un polynôme en $n \geq 1$ variables, et $\tilde{P} : K^n \rightarrow K$ la fonction polynomiale associée. Soient A_1, \dots, A_n des sous-ensembles infinis de K . Si \tilde{P} s'annule sur le pavé $A_1 \times \dots \times A_n$, alors $P = 0$.*

Démonstration : Récurrence sur n . Si $n = 1$, cela découle du fait qu'un polynôme de degré d sur un corps possède au plus d racines. Supposons maintenant que $n \geq 2$ et écrivons $P = \sum_{i=0}^d P_i X_n^i$ avec $P_i \in K[X_1, \dots, X_{n-1}]$. Par hypothèse, pour tout $(a_1, \dots, a_{n-1}) \in A_1 \times \dots \times A_{n-1}$ le polynôme en une variable $Q = \sum_{i=0}^d P_i(a_1, \dots, a_{n-1}) X_n^i$ s'annule sur l'ensemble infini A_n . D'après le cas $n = 1$ déjà démontré, on en déduit que $Q = 0$. Donc tous ses coefficients sont nuls, ce qui signifie que les polynômes en $n - 1$ variables P_0, \dots, P_d s'annulent sur le pavé $A_1 \times \dots \times A_{n-1}$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, on conclut que $P_0 = \dots = P_d = 0$ donc $P = 0$. \square

2.1.2 Corollaire. *Soit $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Soient $P \in K[X_1, \dots, X_n]$ un polynôme non nul en $n \geq 1$ variables. Alors, l'ouvert $U = K^n \setminus Z(P)$ complémentaire de l'ensemble des zéros de P est dense.*

Démonstration : Soit V un ouvert de K^n et P un pavé inclus dans V . D'après le lemme 2.1.1, ce pavé n'est pas inclus dans $Z(P)$, donc il rencontre U . D'où le résultat. \square

2.1.3 Corollaire. Soit K un corps infini et $n \geq 1$. Soit $\mathcal{F}(K^n, K)$ la K -algèbre des applications de K^n dans K et $f : K[X_1, \dots, X_n] \rightarrow \mathcal{F}(K^n, K)$ l'application qui associe à un polynôme P la fonction polynomiale \tilde{P} . Alors f est un morphisme injectif de K -algèbres.

Démonstration : Nous laissons la lectrice¹ vérifier que f est un morphisme de K -algèbres, ce qui signifie que $a\tilde{P} + b\tilde{Q} = a\tilde{P} + b\tilde{Q}$, $\widetilde{PQ} = \tilde{P} \cdot \tilde{Q}$ et $\tilde{1} = 1$. L'injectivité résulte du lemme 2.1.1. On notera que tout fonctionne pareil si on prend comme un anneau de coefficients un anneau intègre infini A : l'injectivité vient de ce que si \tilde{P} s'annule sur K^n , il s'annule sur A^n . \square

2.1.4 Remarque. (Francinou et Gianella [FG95], exercice 5.2) Si K est un corps fini de cardinal q , l'anneau $\mathcal{F}(K^n, K)$ est fini alors que $K[X_1, \dots, X_n]$ est infini donc il ne peut y avoir injectivité. On peut montrer (par interpolation de Lagrange) que f est ici surjectif, de noyau l'idéal $(X_1^q - X_1, \dots, X_n^q - X_n)$, de sorte qu'il induit un isomorphisme de K -algèbres :

$$\bar{f} : K[X_1, \dots, X_n]/(X_1^q - X_1, \dots, X_n^q - X_n) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(K^n, K).$$

2.2 Cayley-Hamilton

Soient k un corps, E un k -espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme, et χ son polynôme caractéristique. Le théorème de Cayley-Hamilton affirme que $\chi(f) = 0$.

2.2.1 Démonstration lorsque $\dim(E) = 2$ et $k = \mathbb{C}$. Choisissons une base \mathcal{B} de E , on se ramène à démontrer le théorème pour la matrice $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on a $\chi_A(T) = T^2 - (a+d)T + (ad-bc)$. Introduisons la fonction $\varphi : M_2(\mathbb{C}) \rightarrow M_2(\mathbb{C})$ définie par

$$\varphi(A) := \chi_A(A) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 - (a+d) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad-bc)I_2.$$

On doit montrer que $\varphi = 0$. On peut l'établir par calcul brutal mais nous préférons une méthode plus géométrique qui s'étend à des situations où celui-ci n'est pas possible. En trois étapes :

(1) Le résultat est évident lorsque f est une homothétie. Il est aussi facile lorsque f est diagonalisable, car il suffit alors de le démontrer sur tout sous-espace $E' \subset E$ sur lequel f est une homothétie ; or notant $f' := f|_{E'}$ et χ' son polynôme caractéristique, on a $\chi' \mid \chi$ et $\chi'(f') = 0$ d'après le cas homothétie, d'où $\chi(f)|_{E'} = \chi(f') = 0$ comme souhaité.

(2) Notons $d(A) = \text{disc}(\chi_A) = (a+d)^2 - 4(ad-bc)$ le discriminant de χ_A . La fonction d est polynomiale, donc l'ensemble U des $A \in M_2(\mathbb{C})$ telles que $d(A) \neq 0$ est un ouvert dense de $M_2(\mathbb{C})$ (corollaire 2.1.2). Il est composé entièrement de matrices diagonalisables, car dire que $d(A) \neq 0$ c'est dire que A possède deux valeurs propres distinctes.

1. Nous utilisons les mots « lecteur » et « lectrice » de manière aléatoire. Le lecteur est invité à vérifier que les occurrences de ces mots dans le texte suivent une loi de Bernoulli de paramètre $p = 1/2$.

(3) La fonction φ est continue car à composantes polynomiales ; elle est nulle sur U d'après (1) ; comme U est dense d'après (2), il s'ensuit que φ est identiquement nulle.

2.2.2 Remarques. (1) En général on sait que $\chi_A(T) = T^n - \text{tr}(A)T^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)$. Pour $n = 2$ ceci fournit χ_A sans calcul. Profitons-en pour donner deux bonnes raisons d'étudier les matrices de taille $n \leq 3$ et connaître les simplifications et cas particuliers correspondants (exemple : la simplicité de $\text{PSL}_n(k)$) : (i) parmi les matrices de taille $n \leq 3$ se manifestent presque tous les comportements des matrices de taille arbitraire ; (ii) dans un exercice d'oral le jury vous questionnera plus volontiers sur des matrices de petite taille.

(2) Nous ne nous sommes limités à $n = 2$ que pour rendre concret à l'extrême le fait que les n^2 applications coordonnées de φ sont des polynômes en les coefficients des matrices, et pour utiliser le discriminant dans un cas où il est familier de tout le monde. Pour n quelconque, la démonstration fonctionne très bien, en utilisant $\text{disc}(f) := (-1)^{n(n-1)/2} \text{Res}(\chi, \chi')$ où on désigne par $\text{Res}(f, g)$ le résultant de f et g , voir [RW14], I.7.2.2. Il est encore vrai, et très important, que l'ensemble des matrices complexes A telles que $\text{disc}(\chi_A) \neq 0$ est un ouvert dense composé de matrices diagonalisables, voir [FGN2], exercices 1.17 et 4.2. Mieux que cela, c'est l'intérieur de l'ensemble des matrices diagonalisables, voir [CG17], chap. III exercice D.24.

(3) Notez l'importance des polynômes en plusieurs variables dans ce qui précède. En algèbre linéaire, essentiellement toutes les fonctions sont de cette nature : formes quadratiques, déterminants...

(4) On a utilisé le fait que pour un sous-espace f -stable F , le polynôme caractéristique de la restriction $f_F := f|_F$ divise celui de f . Voici sous forme d'exercice une version précisée de ce fait : démontrez que f induit un endomorphisme $f_{E/F} : E/F \rightarrow E/F$ et que $\chi = \chi_F \chi_{E/F}$.

2.2.3 Leçons. Nous retiendrons deux grandes leçons de cette démonstration :

(L1) pour démontrer un énoncé portant sur *une* matrice, on a fait intervenir *l'ensemble de toutes les matrices* ;

(L2) on a exploité les structures supplémentaires portées par cet ensemble, en l'occurrence sa topologie.

2.2.4 Exercices. Référence : [FGN2], exercice 2.69.

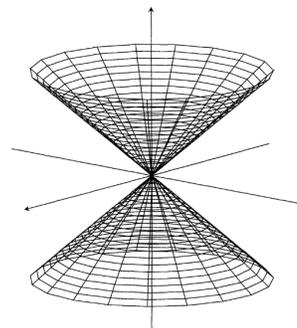
(1) Montrez que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$, pour toute paire de matrices carrées complexes (A, B) .

(2) Notons $c_i = c_i(A)$ les coefficients du polynôme caractéristique d'une matrice A , vues comme fonctions de A . Montrez que toute fonction $\Phi : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ polynomiale en les n^2 variables et telle que $\Phi(AB) = \Phi(BA)$ pour tout (A, B) est une fonction polynomiale en les c_i .

2.3 Le cône nilpotent

Dans cette section et la suivante, on s'intéresse à deux ensembles sans parler de l'action d'un groupe dessus. Pour ces sections, on pourra lire aussi [MM12], chap. XII, § 2.

2.3.1 Exemple. Décrivons l'ensemble $\text{Nilp}_2(k)$ des matrices nilpotentes de $M_2(k)$. Une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est nilpotente ssi $M^2 = 0$ ssi $a + d = a^2 + bc = 0$. En éliminant la variable d via $d = -a$ on obtient une bijection entre $\text{Nilp}_2(k)$ et l'ensemble $\{(a, b, c) \in k^3; a^2 + bc = 0\}$. En utilisant le changement de coordonnées $b = y+z, c = y-z$ on trouve $a^2 + y^2 = z^2$. Prenons $k = \mathbb{R}$ pour dessiner ; l'intersection avec le plan $a = 0$ est la réunion de droites $y = \pm z$, et la tranche $z = \text{constante}$ est un cercle de rayon $|z|$. On trouve un cône de révolution. C'est une surface (dimension 2), régulière partout sauf en $(a, y, z) = (0, 0, 0)$.



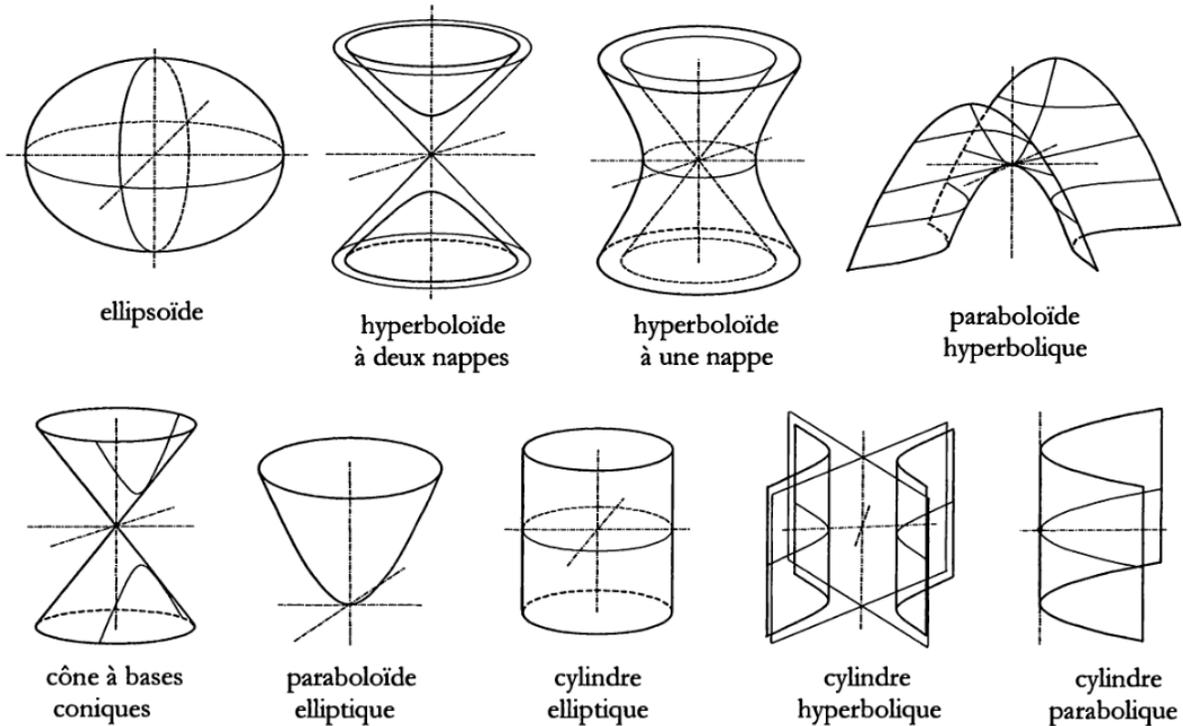
L'ensemble $\text{Nilp}_2(k)$ est donc un cône de révolution dans l'hyperplan des matrices de trace nulle. C'est un fermé de $M_2(k)$. Il n'est stable ni par addition ($E_{12} + E_{21}$ est inversible) ni par multiplication ($E_{12}E_{21} = E_{11}$ est une matrice de projecteur non nul). En revanche il est stable par multiplication scalaire, ce qui lui vaut le nom de *cône* au sens de la définition donnée dans la remarque ci-dessous, et explique la terminologie de *cône nilpotent* que l'on trouve dans la littérature, par exemple dans Caldero et Germoni [CG17].

2.3.2 Remarques.

(1) **Sur la notion générale de cône.** Dans un espace affine \mathcal{E} , donnons-nous un point S et une partie quelconque $B \subset \mathcal{E}$. On appelle *cône de sommet S et de base B* la réunion des droites passant par S et un point de B . Par exemple, une partie d'un espace vectoriel qui est stable par multiplication par tous les scalaires $\lambda \in k$ est un cône.

(2) **Sur la notion de dimension.** La notion de *dimension* pour les espaces vectoriels et affines se généralise aux variétés : la dimension en un point x d'une variété X (ou sous-variété $X \subset \mathbb{R}^n$) est la dimension de l'espace tangent $T_{X,x}$. À titre purement culturel, mentionnons le difficile *théorème d'invariance du domaine* qui implique que cette notion est de nature purement topologique. Plus précisément, le théorème énonce que si un ouvert de \mathbb{R}^n est homéomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^m , alors $n = m$, voir Felix et Tanré, *Topologie algébrique*, Dunod, chapitre 6, § 6.4, th. 6.27 ou Godbillon, *Éléments de topologie algébrique*, Hermann, XIV, § 4.1 Bien sûr, à l'agrégation on ne mobilise pas de telles connaissances !

(3) **Sur les quadriques.** Le cône que l'on vient de trouver est un exemple de *quadrique*, c'est-à-dire un ensemble de points d'un espace (affine, projectif ou euclidien) dont les coordonnées relatives à un repère quelconque satisfont une équation de degré 2. Cette définition est valable en toute dimension, et redonne la définition des coniques en dimension $n = 2$. Le cône nilpotent que nous étudions ici est une quadrique dans un espace de dimension $n = 3$. Pour plus de détails sur les quadriques en dimension 3, la lectrice pourra consulter le résumé synthétique de Ladegaillerie [La03], chap. VIII, § 5 dont nous reproduisons ici l'illustration.



2.4 L'espace des produits scalaires

2.4.1 Exemple. Décrivons l'ensemble $S_2^{++}(\mathbb{R})$ des matrices de produit scalaire, c'est-à-dire symétriques définies positives, de $M_2(\mathbb{R})$. Une telle matrice est de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ avec ${}^tXMX > 0$ lorsque $X \neq 0$, c'est-à-dire $ax^2 + 2bxy + cy^2 > 0$ si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. En fixant y et laissant $x \rightarrow +\infty$ on voit que nécessairement $a > 0$, et de même $c > 0$. Enfin, le fait que le trinôme n'aie pas de racine hormis $X = 0$ impose $b^2 - ac < 0$. On peut vérifier (la lectrice est invitée à le faire) que les conditions nécessaires sur a, b, c ainsi obtenues sont suffisantes, de sorte qu'on a une description $S_2^{++}(\mathbb{R}) \simeq \{(a, b, c); a, c > 0 \text{ et } b^2 - ac < 0\}$. On voit apparaître le même cône que ci-dessus; posons $a = y + z$ et $c = y - z$, on trouve $b^2 + z^2 < y^2$ avec $-y < z < y$. La dernière condition force $y > 0$ et écarte donc le demi-cône situé dans les $y \leq 0$; la condition $b^2 + z^2 < y^2$ dit qu'on est à l'intérieur du cône. On trouve la partie ouverte située au-dessus d'un demi-cône de révolution; c'est un espace de dimension 3 qui est régulier partout : chaque point possède un voisinage ouvert homéomorphe à une boule ouverte donc à \mathbb{R}^3 .

2.4.2 Remarques. On voit que $S_2^{++}(\mathbb{R})$ est ouvert dans $S_2(\mathbb{R})$ qui est un sous-espace vectoriel (donc fermé) de $M_2(\mathbb{R})$. On dit que $S_2^{++}(\mathbb{R})$ est *localement fermé* dans $M_2(\mathbb{R})$.

2.5 Le groupe orthogonal

Dans cet exemple, on s'intéresse inversement à un groupe sans qu'un ensemble sur lequel le groupe agit soit directement mentionné.

2.5.1 Exemple. Considérons le groupe $G = O_3(\mathbb{R})$ des transformations orthogonales de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 . Ses éléments sont les matrices $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ telles que ${}^tMM = I_3$ c'est-à-dire

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = d^2 + e^2 + f^2 = g^2 + h^2 + i^2 = 1 \\ ad + be + cf = ag + bh + ci = dg + eh + fi = 0. \end{cases}$$

Partant de ces seules équations, pas facile d'en dire plus sur G ... Quelle est sa taille? Quelle est sa topologie (compacité, connexité...)? Nous y reviendrons.

3 Topologies matricielles et actions de groupes

L'exemple du théorème de Cayley-Hamilton nous a montré qu'on a grand avantage à reformuler toute l'algèbre linéaire de Licence en tirant parti des connaissances acquises ensuite, notamment la topologie et éventuellement la géométrie différentielle (même si cette dernière peut être entendue au sens "élémentaire").

Pour nous mettre dans l'ambiance, soulignons deux questions basiques que se pose un géomètre qui étudie une partie X d'un espace vectoriel ou d'un ensemble de matrices :

- Ⓒ l'espace X est-il petit ou gros? quelle est sa forme, vu de loin?
- Ⓓ l'espace X est-il régulier ou singulier, i.e. simple ou compliqué quand on le regarde de près?

La première question concerne les aspects globaux de X ; la deuxième, ses aspects locaux. On aimerait bien avoir des réponses claires pour les exemples de la section précédente...

Le langage des actions de groupes sera précieux pour aborder ces questions et d'autres. En ce qui concerne les références bibliographiques, nous recommandons chaleureusement les deux suivantes :

- (i) Caldero et Germoni [CG17], chapitre I, Annexe A,
- (ii) Perrin [Pe96], chapitre I, § 4.

3.1 Topologies matricielles

Dans cette section, le corps k est \mathbb{R} ou \mathbb{C} . On s'intéresse à la topologie des k -espaces vectoriels de dimension finie. On rappelle les faits fondamentaux suivants, vus dans le cours de L3 :

- (1) sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes et définissent donc la même topologie;
- (2) la boule unité d'espace vectoriel de dimension finie est compacte;
- (3) tous les sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie sont fermés;
- (4) toutes les applications linéaires entre espaces vectoriels de dimension finie sont continues.

Dans le programme de l'agrégation, on s'intéresse à diverses parties $X \subset E$ d'espaces vectoriels de dimension finie E . De telles parties seront invariablement munies de la topologie trace, définie par le fait qu'une partie $U \subset X$ est ouverte si et seulement si $U = X \cap V$ pour un

ouvert $V \subset E$. Il en va ainsi pour le cône nilpotent et l'espace des produits scalaires vu dans la section 2.

Certains k -espaces vectoriels de dimension finie A sont munis d'une structure de k -algèbre (voir [Ro18], § 1.1 pour la définition et des exemples). Les normes les plus agréables pour travailler dans une k -algèbre sont celles qui vérifient $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ pour tous $x, y \in A$. Une telle norme est appelée *norme d'algèbre*. Partant d'une norme quelconque $|\cdot|$ sur A , on peut fabriquer une norme d'algèbre dite *subordonnée* à $|\cdot|$ en posant :

$$\|a\| = \sup_{|x|=1} |ax|.$$

3.2 Actions de groupes : définitions élémentaires

Pour tout ensemble X , on note \mathfrak{S}_X l'ensemble des bijections de X dans lui-même.

3.2.1 Définition. Une *action* d'un groupe G sur un ensemble X est la donnée d'un morphisme de groupes $G \rightarrow \mathfrak{S}_X$. À tout point $x \in X$, on associe son *stabilisateur* $G_x = \{g \in G; gx = x\}$ et son *orbite* $\mathcal{O}_x = \{y \in X; y = gx \text{ pour un } g \in G\}$.

Chaque point $x \in X$ donne naissance à une application d'évaluation $\text{ev}_x : G \xrightarrow{\sim} X, g \mapsto gx$ (on évalue g au point x !). La situation la plus favorable est celle où cette application est bijective. En général :

(i) le défaut de surjectivité est mesuré par l'image, qui n'est autre que l'orbite \mathcal{O}_x . On dit que l'action est *transitive* si $\mathcal{O}_x = X$.

(ii) Le défaut d'injectivité est mesuré par le stabilisateur G_x , puisque $gx = g'x$ si et seulement si $g'g^{-1} \in G_x$. On dit que l'action est *libre en x* si $G_x = \{1\}$.

Si $y = gx$, on voit que $G_y = gG_xg^{-1}$, c'est-à-dire que les stabilisateurs de points situés dans la même orbite sont conjugués. Ainsi, les quantités et propriétés suivantes sont naturellement associées à une orbite \mathcal{O} (vérifiez-le) :

- (i) la classe de conjugaison du stabilisateur d'un point $x \in \mathcal{O}$;
- (ii) la propriété que ev_x soit surjective ;
- (ii) la propriété que ev_x soit injective.

3.2.2 Bijection fondamentale. L'application ev_x induit une bijection $G/G_x \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_x$.

Cette bijection est souvent notée encore ev_x .

3.2.3 Définition. Un *espace homogène (ensembliste)* sous un groupe G est un ensemble X non vide muni d'une action transitive de G . Un *espace principal homogène (ensembliste)* est un espace homogène tel que le stabilisateur de tout point est trivial (donc X est muni d'une action libre et transitive — on dit aussi : simplement transitive).

Dans un langage relâché, on peut dire qu'un espace homogène est une orbite, et qu'un espace principal homogène est une orbite libre.

3.3 Actions de groupes : compléments topologiques

3.3.1 Définition. Un *groupe topologique* est un groupe G muni d'une topologie pour laquelle la multiplication et l'inversion sont continues. On dit qu'une action du groupe topologique G sur l'espace topologique X est *continue* si le morphisme d'action $G \times X \rightarrow X$ est continu.

Même si vous n'avez pas suivi de cours portant sur la notion de groupe topologique, vous en utilisez spontanément les ingrédients dans de nombreuses situations. Par exemple, une démonstration classique du fait que $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est simple ([CG18], chap. VII, Annexe A) utilise le fait que l'application $g \mapsto \mathrm{tr}(hgh^{-1}g^{-1})$ est continue.

Pour une action continue sur un X séparé, on remarque (voir [CG17], II.3.1.3) que :

- les applications d'évaluation $\mathrm{ev}_x : G \xrightarrow{\sim} X, g \mapsto gx$ sont continues ;
- les translations par les éléments du groupe $\tau_g : X \rightarrow X, x \mapsto gx$, sont des homéomorphismes ;
- les stabilisateurs de points G_x sont fermés.

3.3.2 Remarque. Topologiquement, les bijections $\mathrm{ev}_x : G/G_x \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(x)$ peuvent être subtiles. En effet, la source G/G_x est munie d'une topologie naturelle, la *topologie quotient* qui est définie par le fait qu'une partie $U \subset G/G_x$ est ouverte si et seulement si sa préimage $\pi^{-1}(U)$ par la projection canonique $\pi : G \rightarrow G/G_x$ est ouverte. Le but $\mathcal{O}(x)$ est également muni d'une topologie naturelle, la *topologie trace* dont les ouverts sont les intersections avec $\mathcal{O}(x)$ des ouverts de X . La subtilité est qu'en général $G/G_x \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(x)$ n'est pas un homéomorphisme, voir ci-dessous.

3.3.3 Définition. Un *espace homogène (topologique)* sous un groupe topologique G est un espace topologique X non vide muni d'une action continue transitive de G telle que la bijection $\mathrm{ev}_x : G/G_x \xrightarrow{\sim} X$ est un homéomorphisme, pour un point $x \in X$ (de manière équivalente, pour tout point $x \in X$). Un *espace principal homogène (topologique)* est un espace homogène topologique tel que le stabilisateur d'un point est trivial.

3.3.4 Remarque. Dans un espace homogène, tout couple de points $x_1, x_2 \in X$ appartient à la même orbite, donc $x_2 = gx_1$ pour un $g \in G$. Alors la translation $\tau_g : X \rightarrow X, x \mapsto gx$ envoie un voisinage de x_1 sur un voisinage de x_2 , si bien que localement, l'espace X a la même allure partout. C'est ce que signifie le terme *homogène*, qui décrit aussi la pâte d'un gâteau lorsqu'elle est bien mélangée. En ce sens, il est plus facile de répondre à la question locale \mathbb{L} pour les espaces homogènes. Dans les exemples abordés à l'agrégation, et en particulier lorsque X est une partie d'un espace vectoriel définie par l'annulation de certains polynômes (en plusieurs variables), il y aura toujours dans X des points « réguliers » au voisinage desquels X possède une structure de variété différentiable. Si X est un espace homogène, par translations ceci sera vrai partout de sorte que *tous les points de X seront réguliers*. On voit ainsi qu'à cause de sa singularité en l'origine, l'exemple 2.3.1 ne peut être un espace homogène.

3.4 Critères d'homéomorphisme

Voici deux résultats qui permettent de traiter essentiellement tous les exemples que l'on rencontre en préparant l'agrégation :

3.4.1 Théorème. ([CG17] prop. II.3.3.1, [MT86] th 2.3.1) *Soient X un espace compact, Y un espace séparé et $f : X \rightarrow Y$ une bijection continue ; alors f est un homéomorphisme.*

S'applique lorsque G/G_x (ou en particulier G) est compact. Pour le résultat suivant, on rappelle qu'un espace topologique est *localement compact* si chacun de ses points possède un voisinage compact, et *dénombrable à l'infini* s'il est réunion dénombrable de compacts.

3.4.2 Théorème. ([CG17] th. II.3.4.3, [MT86] th. 2.3.2) *Soit G un groupe topologique localement compact et dénombrable à l'infini, agissant continûment et transitivement sur un espace E localement compact. Alors la bijection $G/G_x \rightarrow E$ est un homéomorphisme.*

Les démonstrations sont données dans [CG17] et nous ne les reproduisons pas.

Il est important de noter que des hypothèses sont bel et bien nécessaires, c'est-à-dire que $ev_x : G/G_x \rightarrow \mathcal{O}(x)$ n'est pas toujours un homéomorphisme. Un contre-exemple dans lequel l'orbite $\mathcal{O}(x)$ n'est pas localement compacte est donné dans [CG17], II, 3.4.5.

3.5 Premiers exemples

► L'ensemble des 7 jours de la semaine est un espace principal homogène sous $G = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Il en va de même pour les 7 notes de la gamme musicale.

► Un espace affine est par définition un espace principal homogène E sous un espace vectoriel \mathcal{E} appelé la *direction* de E .

► La sphère euclidienne $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ de dimension n est un espace homogène sous le groupe $SO_{n+1}(\mathbb{R})$. Le stabilisateur d'un point $P \in S^n$ est le groupe orthogonal $SO(H) \simeq SO_n(\mathbb{R})$ de l'hyperplan $H = (OP)^\perp$.

► L'ensemble des réseaux de $E = \mathbb{R}^n$ est un espace homogène sous le groupe $GL_n(\mathbb{R})$, le stabilisateur du réseau \mathbb{Z}^n étant le groupe $GL_n(\mathbb{Z})$. Ainsi l'ensemble des réseaux s'identifie à l'ensemble $GL_n(\mathbb{R})/GL_n(\mathbb{Z})$.

4 Quelques espaces homogènes

Dans cette section, nous montrons comment les exemples de la section 2 peuvent être analysés avec les outils du programme de l'agrégation.

4.1 Bases d'un espace vectoriel

Soit k un corps et E un k -espace vectoriel de dimension finie. Notons $X = B(E)$ l'ensemble des bases de E . Le groupe $G = GL(E)$ agit sur X de la manière habituelle : si $e = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base et g un isomorphisme linéaire, on pose $g \cdot e = (g(e_i))_{1 \leq i \leq n}$. Il est classique que cette action est libre et transitive, c'est-à-dire que l'ensemble $B(E)$ des bases de E est un espace principal homogène sous le groupe $GL(E)$. On peut préciser ceci :

4.1.1 Théorème. *Soit E un k -espace vectoriel de dimension finie.*

(i) *L'ensemble $B(E)$ des bases de E est un espace principal homogène sous le groupe $GL(E)$. Si $k = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , c'est un espace principal homogène topologique.*

(ii) Si E est un espace euclidien, l'ensemble $\text{BON}(E)$ des bases orthonormales de E est un espace principal homogène topologique sous le groupe $\text{O}(E)$.

Démonstration : Il ne nous reste que les aspects topologiques à aborder, lorsque $k = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Rappelons que tous les k -espaces vectoriels de dimension finie sont munis d'une topologie naturelle. En particulier $\text{B}(E) \subset E^n$ est muni de la topologie trace, héritée de celle de E^n . Si l'on fixe une base e de E , on obtient une identification $\text{GL}(E) \simeq \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et de même, si on identifie une base à la liste de ses vecteurs rangés en colonnes, une identification $\text{B}(E) \simeq \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Avec ces identifications, l'application d'évaluation

$$\text{ev}_e : \text{GL}(E) \longrightarrow \text{B}(E), \quad g \mapsto g \cdot e$$

est simplement l'identité. En particulier, c'est un homéomorphisme. Si de plus E est un espace euclidien, en choisissant la base e orthonormée on aboutit à la même conclusion. Pour résumer, nous avons démontré : \square

4.2 Retour sur le cône nilpotent

Pour tout entier d , on note $J_d \in \text{M}_d(k)$ le *bloc de Jordan de taille d* :

$$J_d = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}.$$

4.2.1 Théorème. (Réduction de Jordan des nilpotents, [MM12], X.2) *Soit k un corps. Pour toute matrice nilpotente $N \in \text{M}_n(k)$, il existe une unique suite d'entiers $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_r$ telle que N est semblable à la matrice diagonale par blocs de Jordan $\text{diag}(J_{d_1}, \dots, J_{d_r})$.*

Démonstration : Nous renvoyons à [MM12], X.2 ou Gourdon [Gou09], chap. 4, § 4. \square

4.2.2 Remarque. Du cas nilpotent, on déduit facilement le théorème de réduction de Jordan pour tous les endomorphismes à polynôme caractéristique scindé. Il suffit pour cela de travailler sur les sous-espaces caractéristiques en utilisant le lemme des noyaux.

Bien sûr, on a $d_1 + \dots + d_r = n$. Une telle suite $\underline{d} = (d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_r)$ est appelée une *partition* de n . On note $\underline{d}(N)$ la partition associée à N . Si l'on fixe une partition \underline{d} , la partie unicité dans le théorème nous dit que l'ensemble $\text{Nil}_{\underline{d}}(\text{M}_n(k))$ des matrices nilpotentes telles que $\underline{d}(N) = \underline{d}$ est un espace homogène sous $\text{GL}_n(k)$.

4.2.3 Commutants. Par définition de la similitude, le stabilisateur de $N = \text{diag}(J_{d_1}, \dots, J_{d_r})$ est le commutant de N dans $\text{GL}_n(k)$; c'est une raison pour laquelle le calcul de commutants de matrices est important. Ce thème faisait l'objet du sujet de Mathématiques Générales à l'Agrégation 2017.

(i) Pour des matrices qui ont un seul bloc de Jordan ($r = 1$), le calcul est assez facile : voir [MM12], III.2 ou la note [Ro17]. La dimension du commutant est alors égale à n , et la dimension de l'orbite est donc $n^2 - n$.

(ii) Pour des matrices qui ont $r \geq 2$ blocs de Jordan, le calcul est plus délicat. Lorsque $r = 2$, l'exercice III.5.4 de [MM12] montre la forme que prend le résultat. La dimension du commutant est strictement supérieure à n , de sorte que l'orbite de telles matrices est de dimension strictement inférieure à $n^2 - n$. L'annexe C de [CG17], chap. III donne la description complète des orbites et de leurs inclusions lorsque $n = 6$. Il y a dans ce cas 11 orbites, associées aux 11 partitions de $n = 6$.

4.2.4 Exercice. Revenons sur l'exemple de l'introduction. Lorsque $n = 2$, il y a deux partitions de n , qui sont (2) et $(1, 1)$. La première correspond à un bloc de Jordan de taille 2, c'est la classe de la matrice $N = E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. La seconde correspond à deux blocs de Jordan de taille 1 donc nuls, c'est la classe de la matrice nulle. L'ensemble $\text{Nilp}_2(k)$ est partitionné en deux orbites de $\text{GL}_2(k)$: l'orbite \mathcal{O}_1 de la matrice nulle qui est réduite à la matrice nulle elle-même, et l'orbite \mathcal{O}_2 de $N = E_{12}$ qui est le cône décrit en 2.3.1 privé de son sommet. La deuxième orbite est ouverte dans le cône $\text{Nilp}_2(k)$, ce que l'on voit bien en observant que les matrices $N_\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ situées dans l'orbite \mathcal{O}_2 tendent vers 0 lorsque $\epsilon \rightarrow 0$. Les deux orbites sont sans singularités (ce sont des variétés différentiables), ce qui n'est pas en contradiction avec le fait que le cône $\text{Nilp}_2(k)$ possède, lui, une singularité !

4.3 Retour sur l'espace des produits scalaires

La méthode d'orthogonalisation de Gram-Schmidt est en fait due à Laplace, cf [RW14].

4.3.1 Théorème. (Orthogonalisation de Gram-Schmidt, [RW14], I.4.1.4, th. 18 et cor. 19) *Pour toute base $v = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'un espace euclidien E , il existe une unique famille orthonormale $\varepsilon = (\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n}$ telle que $\text{Vect}(v_1, \dots, v_k) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ et $(v_k, \varepsilon_k) > 0$ pour tout k .*

Ces conditions signifient que la matrice de passage de v à ε appartient à $T_n^{++}(\mathbb{R})$, le sous-groupe de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ composé des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux strictement positifs.

Démonstration : On pose $F_0 = \{0\}$ et on fait une récurrence sur $k \geq 1$. Notons p_k la projection orthogonale de $F_k = \text{Vect}(v_1, \dots, v_k)$ sur F_{k-1} . Les conditions requises sur ε_k imposent que l'on ait (i) $\varepsilon_k \in \ker(p_k)$, et (ii) $\varepsilon_k = \lambda_k(v_k + y_k)$ avec $y_k \in F_{k-1}$, $\lambda_k = \|v_k + y_k\|^{-1} > 0$. De (i) on déduit $y_k = -p_k(v_k)$, et ε_k défini par (ii) répond à la question et est le seul possible. \square

4.3.2 Remarques terminologiques. On prendra garde qu'une base orthogonale (ce qui signifie que $(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ pour tous $i \neq j$) n'est pas nécessairement orthonormale (condition supplémentaire $(\varepsilon_i, \varepsilon_i) = 1$ pour tout i). Le procédé de Gram-Schmidt permet, au choix, de se contenter d'orthogonaliser, ou d'orthonormaliser (voir [RW14]). Malgré ces variantes, dans la littérature le terme d'*orthogonalisation de Gram-Schmidt* peut faire référence à l'un ou l'autre de ces procédés. Et puisqu'on parle de bizarreries terminologiques, rappelons qu'une matrice *orthogonale* est une matrice dont les colonnes (ou les lignes, au choix) sont *orthonormales*.

Pour démontrer la continuité de la décomposition de Gram-Schmidt par rapport à la base v , un lemme nous sera utile.

4.3.3 Lemme. Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension n et $k, l \in \{1, \dots, n\}$ deux entiers. Alors l'application $f_{k,l} : B(E) \rightarrow E$ qui associe à toute base $v = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$ le projeté orthogonal de v_l sur $\text{Vect}(v_1, \dots, v_k)$ est continue.

Démonstration : Posons $F := \text{Vect}(v_1, \dots, v_k)$. Par propriété du supplémentaire orthogonal, tout vecteur $x \in E$ s'écrit $x = y + z$ avec $y \in F$ et $(z, v_1) = \dots = (z, v_k) = 0$. Écrivons $y = y_1 v_1 + \dots + y_k v_k$ avec $y_i \in \mathbb{R}$. Pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, on a

$$(\star) \quad (x, v_i) = (y, v_i) = y_1 (v_1, v_i) + \dots + y_k (v_k, v_i).$$

Notons H_k l'inverse de la matrice de Gram $G_k = ((v_i, v_j))_{1 \leq i, j \leq k}$. Ses coefficients $h_{i,j} = h_{i,j}(v)$ sont des quotients d'un mineur de G_k par son déterminant et sont donc continus en v . L'inversion de la relation (\star) fournit $y_i = \sum_{j=1}^k h_{i,j} \cdot (x, v_j)$. Pour $x = v_l$, on trouve

$$y = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k h_{i,j} \cdot (v_l, v_j) \cdot v_i$$

qui est bien une expression continue en v . □

Une rétraction $f : X \rightarrow Y$ sur une partie $Y \subset X$ est une application telle que $f|_Y = \text{id}_Y$.

4.3.4 Théorème. L'application $B(E) \rightarrow \text{BON}(E)$ donnée par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt est une rétraction continue de l'inclusion $\text{BON}(E) \subset B(E)$.

Démonstration : Notons $S(E)$ la sphère unité de E pour le produit scalaire donné, et $\varphi : E \setminus \{0\} \rightarrow S(E)$ l'application définie par $\varphi(x) = \|x\|^{-1}x$. C'est une application continue. Soit maintenant v une base de E . Notons $F_k = \text{Vect}(v_1, \dots, v_k)$ et $p_k : F_k \rightarrow F_{k-1}$ les projecteurs orthogonaux introduits dans la démonstration du théorème de Gram-Schmidt. La démonstration a fourni la base orthonormalisée par les formules $\varepsilon_k = \varphi(v_k - p_k(v_k))$. Le lemme précédent montre que chaque ε_k est une fonction continue de v , d'où le résultat. □

On va donner deux corollaires classiques de l'orthogonalisation de Gram-Schmidt. Le premier s'obtient en interprétant Gram-Schmidt en termes de matrices de passage. Rappelons qu'en général, on a la formule de produit

$$\text{Mat}_{e,g}(vu) = \text{Mat}_{f,g}(v) \cdot \text{Mat}_{e,f}(u)$$

pour la matrice de la composition $(E, e) \xrightarrow{u} (F, f) \xrightarrow{v} (G, g)$ de deux applications linéaires définies sur des espaces vectoriels de dimension finie munis de bases. De plus, la matrice de passage de e à f est par définition la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de f exprimés sur la base e , c'est-à-dire (attention à l'ordre des bases!) la matrice $\text{Mat}_{f,e}(\text{id})$.

4.3.5 Théorème. (Décomposition QR , [RW14], I.4.1.7.2, th. 47) *Pour toute matrice $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, il existe un unique couple $(Q, R) \in \text{O}_n(\mathbb{R}) \times \text{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que*

$$M = QR.$$

De même, il existe un unique couple $(Q', R') \in \text{O}_n(\mathbb{R}) \times \text{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $M = R'Q'$.

Démonstration : On travaille dans $E = \mathbb{R}^n$ avec sa base canonique $e = (e_i)$ et son produit scalaire canonique $(-, -)$ dont la matrice dans la base e est l'identité. Comme $\text{O}_n(\mathbb{R})$ et $\text{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ sont des sous-groupes, l'inversion $M \mapsto M^{-1}$ échange les écritures (1) et (2) donc on peut se contenter de considérer (1). Notons v_k le k -ème vecteur colonne de M . Pour démontrer l'existence, on note ε l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de v . En considérant la composition

$$(E, v) \xrightarrow{\text{id}} (E, \varepsilon) \xrightarrow{\text{id}} (E, e),$$

on obtient la formule $M = QR$, où $Q = \text{Mat}_{\varepsilon, e}(\text{id}) \in \text{O}_n(\mathbb{R})$ car ε et e sont orthogonales, et $R = \text{Mat}_{v, \varepsilon}(\text{id}) \in \text{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ d'après Gram-Schmidt. Démontrer l'unicité revient à démontrer que $\text{O}_n(\mathbb{R}) \cap \text{T}_n^{++}(\mathbb{R}) = \{\text{I}_n\}$. Pour ceci, on montre par récurrence sur $k \geq 1$ que pour une matrice M appartenant à l'intersection des deux sous-groupes, sa k -ème colonne v_k est égale à e_k ; nous laissons la lectrice faire cette vérification. \square

4.3.6 Remarque. La décomposition QR est parfois appelée « décomposition OT » ou « décomposition de Gram ». Elle est très utilisée en analyse numérique, où on la construit à l'aide de matrices de Householder plutôt qu'avec l'algorithme de Gram-Schmidt qui est numériquement instable; on pourra consulter [RW14], I.4.1.7.2, th. 47, Ciarlet [Ci07] ou Filbet [Fi13]. Elle est utilisée également dans l'étude des groupes de Lie, sous la forme d'une variante appelée décomposition d'Iwasawa (ou de Cartan).

Le deuxième corollaire classique que nous voulons donner s'obtient en interprétant Gram-Schmidt comme un changement de base pour un produit scalaire. Rappelons que si la matrice d'un produit scalaire dans une base e est $A \in \text{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $(x, y) = {}^t XAY$, alors pour toute base f avec matrice de passage $P = \text{Mat}_{f, e}(\text{id}) \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, la matrice du produit scalaire dans la nouvelle base est $A' = {}^t PAP$ (en effet $X = PX'$, $Y = PY'$, et ${}^t(PX')APY' = {}^t X'({}^t PAP)Y'$).

4.3.7 Théorème. (Décomposition de Cholesky ([RW14], I.3.4.3, Prop. 50) *Pour toute matrice symétrique définie positive $A \in \text{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe une unique $T \in \text{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que*

$$A = {}^t TT.$$

De même, il existe une unique matrice $U \in \text{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A = U {}^t U$.

Démonstration : L'ensemble $\text{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ n'est pas un sous-groupe, mais il est stable par inversion et celle-ci échange les écritures $A = {}^t TT$ et $A = U {}^t U$ donc on peut se contenter de regarder la première. Démontrons l'existence. On considère l'espace $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique e et du produit scalaire dont la matrice dans la base e est A . Notons ε l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de e et $P = \text{Mat}_{\varepsilon, e}(\text{id}) \in \text{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ la matrice de passage de e à ε . D'après la

formule de changement de base pour les formes bilinéaires, la matrice du produit scalaire dans la nouvelle base est $A' = {}^tPAP$. Or $A' = I_n$ puisque ε est orthonormale, donc $A = {}^tTT$ avec $T = P^{-1}$. Pour démontrer l'unicité, si T_1 et T_2 conviennent alors la matrice $X := T_2^{-1}T_1$ vérifie ${}^tX = X^{-1}$. Comme $X \in T_n^{++}(\mathbb{R})$, en considérant séparément les coefficients diagonaux et les coefficients non-diagonaux on voit que $X = I_n$. \square

4.3.8 Remarque. Les décompositions QR et Cholesky sont le sujet de l'exercice 2.29 de [FGN3].

4.3.9 Exercice. Montrez que Cholesky $\Rightarrow QR$. Réciproquement, montrez que $QR \Rightarrow$ Cholesky (vous aurez besoin d'utiliser le fait que toute matrice $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ possède une unique racine carrée B , ce qui découle du *théorème spectral* qui affirme la diagonalisabilité en base orthonormée des matrices symétriques).

4.3.10 Application à l'espace des produits scalaires. Interprétons maintenant ces résultats en termes d'orbites. Dans un espace vectoriel réel de dimension finie E , considérons l'ensemble $X = \text{PS}(E)$ des produits scalaires sur E . Le groupe $\text{GL}(E)$ agit ainsi : pour tout produit scalaire $(-, -)$ sur E et tout élément $g \in \text{GL}(E)$, le transformé $(-, -)' = g \cdot (-, -)$ est le produit scalaire défini par la formule (on met des inverses pour avoir une action à gauche) :

$$(x, y)' = (g^{-1}x, g^{-1}y).$$

Après choix d'une base de E , les vecteurs sont identifiés à des vecteurs colonnes et un produit scalaire est identifié à une matrice $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $(x, y) = {}^tXAY$. Si un automorphisme linéaire $g \in \text{GL}(E)$ a pour matrice $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, la matrice de passage vers la base image par g est $P = Q^{-1}$ et on a

$$(x, y)' = (g^{-1}x, g^{-1}y) = {}^tXAY = {}^tQ^{-1}XAQ^{-1}Y = {}^tX{}^tPAPY.$$

On retrouve la formule $P \cdot A := {}^tPAP$ de changement de base dans le produit scalaire. On peut par ailleurs observer que nous sommes dans un exemple typique de situation en algèbre linéaire où l'angle de vue peut nous laisser voir, au choix, deux objets reliés par une transformation g , ou un seul objet vu dans deux systèmes de coordonnées différents.

Comme tout produit scalaire est en particulier une forme bilinéaire, l'espace $\text{PS}(E)$ se plonge dans l'ensemble des formes bilinéaires sur E qui est un espace vectoriel de dimension n^2 . Ainsi $\text{PS}(E)$ hérite d'une topologie naturelle, trace de la topologie ambiante.

4.3.11 Théorème. *L'espace $\text{PS}(\mathbb{R}^n)$ des produits scalaires sur \mathbb{R}^n est un espace principal homogène topologique sous $T_n^{++}(\mathbb{R})$.*

Démonstration : Le théorème de décomposition de Cholesky nous montre que l'application $T_n^{++}(\mathbb{R}) \rightarrow \text{PS}(\mathbb{R}^n)$, $T \mapsto {}^tTT$ est bijective. Il s'agit ensuite de justifier que c'est un homéomorphisme. Ici nous nous simplifierons la vie en faisant appel au théorème 3.4.2. \square

4.3.12 Exercice. Revenons au cas $n = 2$ comme dans 2.4. Décrire explicitement l'application $T_2^{++}(\mathbb{R}) \rightarrow \text{PS}(\mathbb{R}^2) \simeq S_2^{++}(\mathbb{R})$ en coordonnées et montrer directement qu'elle est bijective.

4.4 Retour sur le groupe orthogonal

Nous revenons maintenant au groupe orthogonal, pour mieux comprendre sa topologie et sa géométrie de base. Le résultat qui suit est énoncé et démontré dans [CG17], chap. II, prop. 4.2.6 ou [Fa06], chap. I, § 5.

4.4.1 Proposition. *Soit $n \geq 2$ entier. Le groupe $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ agit transitivement sur la sphère S^{n-1} , avec des stabilisateurs isomorphes à $\mathrm{SO}_{n-1}(\mathbb{R})$. On a un homéomorphisme :*

$$\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_{n-1}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} S^{n-1}$$

où $\mathrm{SO}_{n-1}(\mathbb{R})$ est identifié avec le stabilisateur de la matrice identité, et l'ensemble source est muni de la topologie quotient. Le groupe $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est compact et connexe par arcs.

Démonstration : D'abord, il est clair que si $r \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est une isométrie de \mathbb{R}^n et $x \in S^{n-1}$, alors $r(x) \in S^{n-1}$. Identifions les stabilisateurs pour cette action. Si x est fixe sous $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ alors le supplémentaire orthogonal $H = x^\perp$ est un hyperplan stable, et de plus n'importe quel $r \in \mathrm{SO}(H)$ peut être complété de manière unique en une isométrie de \mathbb{R}^n qui vaut l'identité sur la droite $\mathrm{Vect}(x)$ et r sur l'hyperplan H . Ceci montre qu'on a un isomorphisme

$$G_x = \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})_x \simeq \mathrm{SO}(x^\perp) \simeq \mathrm{SO}_{n-1}(\mathbb{R}).$$

Passons à la transitivité. Pour $n = 2$, on sait que le groupe de rotations $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ agit transitivement sur le cercle S^1 . Pour n quelconque, soient $x, y \in S^{n-1}$ deux points distincts. Notons $P \simeq \mathbb{R}^2$ le 2-plan contenant l'origine 0 et les points x et y . D'après le résultat pour $n = 2$ on peut trouver une rotation r_P qui envoie x sur y . Il existe une unique rotation $r \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ qui agit comme r_P sur le plan P , et comme l'identité sur le supplémentaire orthogonal P^\perp (après choix de bases de P et P^\perp , sa matrice est diagonale par blocs avec la matrice de r_P dans le premier bloc et la matrice I_{n-2} dans le deuxième). Comme $r(x) = y$, on a terminé.

Le morphisme d'évaluation en l'identité fournit une bijection $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_{n-1}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} S^{n-1}$. Comme $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est localement compact et dénombrable à l'infini, et la sphère S^{n-1} est localement compacte, on déduit du théorème 3.4.2 que la bijection est un homéomorphisme.

Il reste à déduire la compacité et la connexité de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$. Une possibilité est d'utiliser le petit résultat topologique suivant : si G est un groupe topologique et H un sous-groupe de G , si H et G/H sont compacts (resp. connexes), alors G l'est également. Pour cela nous renvoyons par exemple à [CG17], chap. II, prop. 4.2.1 et 4.2.2 (mais le lecteur peut aussi démontrer cela tout seul !). Une autre possibilité est d'établir la compacité en disant que $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, borné car correspondant aux matrices telles que $\|M\|_2 = 1$ où $\|\cdot\|_2$ est la norme subordonnée à la norme 2. Et d'établir la connexité par un argument direct comme dans [Fa06], chap. I, § 5, cor. 5.2. \square

Le groupe $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est également compact, et possède deux composantes connexes. On peut montrer que sa dimension est $n(n-1)/2$, soit en utilisant l'action transitive sur S^{n-1} et l'isomorphisme de variétés $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_{n-1}(\mathbb{R}) \simeq S^{n-1}$ qui en découle, soit en calculant la dimension de l'espace tangent en l'identité, comme par exemple dans [MT86].

Références

- [CG17] PHILIPPE CALDERO, JÉRÔME GERMONI, *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries*, tome premier, Calvage & Mounet, 2017.
- [CG18] PHILIPPE CALDERO, JÉRÔME GERMONI, *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries*, tome second, Calvage & Mounet, 2018.
- [Ci07] PHILIPPE CIARLET, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, 5ème édition, Dunod, 2007.
- [Fa06] JACQUES FARAUT, *Analyse sur les groupes de Lie - Une introduction*, Calvage & Mounet, 2006.
- [Fi13] FRANCIS FILBET, *Analyse numérique, Algorithme et étude mathématique*, Dunod, 2013.
- [FG95] SERGE FRANCINO, HERVÉ GIANELLA, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation*, Masson, 1995.
- [FGN2] SERGE FRANCINO, HERVÉ GIANELLA, SERGE NICOLAS, *Exercices de mathématiques, Oraux X-ENS, algèbre 2*, Cassini, 2009.
- [FGN3] SERGE FRANCINO, HERVÉ GIANELLA, SERGE NICOLAS, *Exercices de mathématiques, Oraux X-ENS, algèbre 3*, Cassini, 2008.
- [Gob01] RÉMI GOBLOT, *Algèbre commutative*, Dunod, 2001 (édition précédente : Masson, 1996).
- [Gou09] XAVIER GOURDON, *Algèbre*, Ellipses, 2009.
- [La03] YVES LADEGAILLERIE, *Géométrie – affine, projective, euclidienne et anallagmatique*, Ellipses, 2003.
- [LF85] JACQUELINE LELONG-FERRAND, *Les fondements de la géométrie*, PUF, 1985.
- [Ma84] MARIE-PAULE MALLIAVIN, *Algèbre commutative*, Masson, 1984.
- [MM12] ROGER MANSUY, RACHED MNEIMNÉ, *Algèbre linéaire, réduction des endomorphismes*, Vuibert, 2012.
- [MT86] RACHED MNEIMNÉ, FRÉDÉRIC TESTARD, *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*, Hermann, 1986.
- [Gr11] JOSEPH GRIFONE, *Algèbre linéaire*, quatrième édition, Cépaduès éditions, 2011.
- [Pe96] DANIEL PERRIN, *Cours d'algèbre*, Ellipses, 1996.
- [Ro17] MATTHIEU ROMAGNY, NOMBRE D'ENDOMORPHISMES NILPOTENTS SUR UN CORPS FINI, note disponible à l'adresse http://agreg-maths.univ-rennes1.fr/.../nombre_endom_nilpotents_sur_Fq.pdf
- [Ro18] MATTHIEU ROMAGNY, *Algèbres de dimension finie, Décomposition de Jordan-Chevalley, exponentielle*, notes de cours disponibles à l'adresse http://agreg-maths.univ-rennes1.fr/journal/2019/algebres_de_dim_finie.pdf
- [RW14] JEAN-PIERRE RAMIS, ANDRÉ WARUSFEL (sous la direction de), *Mathématiques tout-en-un pour la Licence L2*, deuxième édition, Dunod, 2014.