Transvections, dilatations et sous-groupes distingués du groupe linéaire

Dans cette feuille d'exercices, on s'intéresse à des familles d'endomorphismes (transvections et dilatations) de E qui permettent d'étudier les sous-groupes distingués de $\mathrm{GL}(E)$ et $\mathrm{SL}(E)$.

Dans toute la feuille, on fixe un corps commutatif k et un k-espace vectoriel E de dimension finie n.

1 Préliminaires

Exercice 1 (*Endomorphismes de rang 1*, première question du sujet Math Géné 2017)
On définit une application $b : E \times E^* \to \mathrm{L}(E)$ de la manière suivante : pour tout vecteur $a \in E$ et toute forme $f \in E^*$, on note $b_{a,f} : E \to E$ défini par $b_{a,f}(x) = f(x)a$.

1. Démontrez que l'image de b est l'ensemble des endomorphismes de rang $\leqslant 1$.
2. Matriciellement : toute matrice de rang 1 est de la forme $X\,{}^{\mathrm{t}}Y$ avec X, Y deux vecteurs colonne.
3. Démontrez que $b_{a,f} = 0$ si et seulement si $a = 0$ ou $f = 0$.
4. Démontrez que si $b_{a,f} = b_{a',f'} \neq 0$, alors il existe $\lambda \in k^*$ tel que $(a', f') = (\lambda a, \lambda^{-1} f)$.

On s'intéresse maintenant aux endomorphismes qui *diffèrent de l'identité par un endomorphisme de rang 1*.

Exercice 2 (*Identité + un endomorphisme de rang 1*)
On fixe $(a, f) \in E \times E^*$ et on pose $u(x) = x + f(x)a$, c'est-à-dire $u = \mathrm{id} + b_{a,f} \in \mathrm{L}(E)$.

1. Démontrez que $\det(u) = 1 + f(a)$. (*Soit $H = \ker(f)$. Observez que $u(x) \equiv (1 + f(a))x \mod H$.*)
2. Démontrez que $\chi_u(T) = (T-1)^{n-1}(T - (1 + f(a)))$.

Exercice 3 (*Transvections et dilatations*)
On étudie ici les applications linéaires $u_{a,f} : E \to E$ de la forme $u_{a,f}(x) = x + f(x)a$ qui sont *inversibles* et *distinctes de l'identité*. Ceci signifie (voir exercices précédents) que $a \neq 0$, $f \neq 0$ et $f(a) \neq -1$. En particulier $D := \mathrm{Vect}(a)$ est une droite et $H := \ker(f)$ est un hyperplan, que l'on dit *associés à u*.

1. Soient $g \in \mathrm{GL}(E)$ et $u' = gug^{-1}$. Démontrez que u' est une transformation du même type que u, avec pour éléments associés $D' = g(D)$ et $H' = g(H)$.
2. Démontrez qu'on a l'alternative suivante :
   (D) u est diagonalisable ; de manière équivalente $D \not\subset H$; de manière équivalente $f(a) \neq 0$. On dit alors que u est une *dilatation*.
   (T) u n'est pas diagonalisable ; de manière équivalente $D \subset H$; de manière équivalente $f(a) = 0$. On dit alors que u est une *transvection*.

Exercice 4 (*Centre de* $\mathrm{GL}(E)$)
Démontrez qu'un endomorphisme $g \in \mathrm{GL}(E)$ qui commute avec tous les éléments de $\mathrm{SL}(E)$ est une homothétie. En particulier, le centre de $\mathrm{GL}(E)$ est le sous-groupe des homothéties et le centre de $\mathrm{SL}(E)$ est isomorphe au groupe $\mu_n(k)$ des racines n-ièmes de l'unité de k.
(*Utiliser le fait que g commute avec toutes les transvections.*)

Exercice 5 (*Transvections d'hyperplan fixé ou de droite fixée*)
Soient H un hyperplan, et D une droite, de l'espace vectoriel E.

1. On note $\mathrm{T}(H)$ la réunion de l'ensemble des transvections d'hyperplan H et de l'identité.
   (a) Démontrez que $\mathrm{T}(H) = \{u \in \mathrm{SL}(E); u_{|H} = \mathrm{id}_H\}$ et que c'est un sous-groupe de $\mathrm{SL}(E)$. Donnez une représentation matricielle de $\mathrm{T}(H)$ dans une base bien choisie.
   (b) Démontrez que pour toute forme linéaire f_0 de noyau H, l'application $a \mapsto u_{a,f_0}$ induit un isomorphisme de groupes $H \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}(H)$.
2. On note $\mathrm{U}(D)$ la réunion de l'ensemble des transvections de droite D et de l'identité.
   (a) Démontrez que $\mathrm{U}(D) = \{u \in \mathrm{SL}(E); u \equiv \mathrm{id} \mod D\}$ et que c'est un sous-groupe de $\mathrm{SL}(E)$. Donnez une représentation matricielle de $\mathrm{U}(D)$ dans une base bien choisie.
   (b) Démontrez que pour tout vecteur directeur a_0 de D, l'application $f \mapsto u_{a_0,f}$ induit un isomorphisme de groupes $D^\perp \xrightarrow{\sim} \mathrm{U}(D)$, où $D^\perp = \{f \in E^*, f_{|D} = 0\}$ est l'orthogonal de D.
3. On suppose que $D \subset H$ et on choisit a_0 et f_0 tels que $D = \mathrm{Vect}(a_0)$ et $H = \ker(f_0)$. Démontrez que l'application $\lambda \mapsto u_{\lambda a_0,f_0}$ induit un isomorphisme de groupes $(k,+) \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}(H) \cap \mathrm{U}(D)$.
4. Donnez la représentation matricielle de $\mathrm{T}(H) \cap \mathrm{U}(D)$ lorsque $H = \ker(e_j^*)$ et $D = \mathrm{Vect}(e_i)$, où $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de E et $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ est sa base duale. (*Il s'agit des matrices $T_{i,j}(\lambda)$!*)

2 Simplicité et sous-groupes distingués

2.1 Rappel sans preuve des résultats principaux

(*Les résultats de cette sous-section pourront être commentés et partiellement démontrés en TD.*)

Le résultat fondamental de la théorie est la simplicité du groupe spécial linéaire (voir [Pe96], IV.4.1) :

Théorème 1. *Le groupe* $\mathrm{PSL}(E)$ *est simple, sauf si* $n = 2$, $k = \mathbb{F}_2$ *ou* $n = 2$, $k = \mathbb{F}_3$.

Cet énoncé se déduit des deux suivants (que l'on trouve dans [Pe96], IV.2.11-212 et IV.2.17) :

Théorème 2. *Les transvections engendrent* $\mathrm{SL}(E)$*. Les transvections et les dilatations engendrent* $\mathrm{GL}(E)$.

Théorème 3. *Deux transvections quelconques sont conjuguées dans* $\mathrm{GL}(E)$*. Si* $n \geqslant 3$*, elles le sont aussi dans* $\mathrm{SL}(E)$.

Les classes de conjugaison de transvections dans $\mathrm{SL}(E)$ lorsque $n = 2$ sont décrites dans [Pe96], IV.2.18. On peut retenir que la simplicité, qui est une propriété *algébrique* (relative à la seule structure du groupe), est démontrée dans le cas de $\mathrm{PSL}(E)$ par des méthodes *géométriques* (relatives à l'action du groupe sur l'espace). Les théorèmes 2 et 3 montrent que les transvections jouissent de propriétés qui les rendent particulièrement adaptées pour cet objectif :

(i) elles forment une famille génératrice ;

(ii) elles sont proches de l'identité (par définition), ce qui les rend « sympathiques individuellement » ;

(iii) elles sont toutes conjuguées dans $\mathrm{SL}(E)$ si $n \geqslant 3$, ce qui les rend « sympathiques collectivement ».

Pour terminer ce rappel, indiquons une conséquence facile du théorème 1 ([Pe96], IV.3.1) :

Théorème 4. (1) $D(\mathrm{GL}(E)) = \mathrm{SL}(E)$ *sauf dans le cas* $n = 2$, $k = \mathbb{F}_2$.
(2) *On a* $D(\mathrm{SL}(E)) = \mathrm{SL}(E)$ *sauf dans les deux cas* $n = 2$, $k = \mathbb{F}_2$ *et* $n = 2$, $k = \mathbb{F}_3$.

2.2 Application aux sous-groupes distingués de $\mathrm{GL}(E)$ et $\mathrm{SL}(E)$

On considère ici les résultats de la sous-section précédente comme connus. Nous allons utiliser la simplicité de $\mathrm{PSL}(E)$ pour faire la liste des sous-groupes distingués de $\mathrm{GL}(E)$ et $\mathrm{SL}(E)$. Pour simplifier, nous écarterons les cas particuliers où $n = 2$ et $|k| \leqslant 3$.

On part d'une petite observation innocente.

Exercice 6 (*Sous-groupes du centre, sur-groupes du groupe dérivé*)
Soit G un groupe, $Z(G)$ son centre et G' son groupe dérivé.

1. Montrez que tout sous-groupe de $Z(G)$ est distingué dans G.
2. Montrez que tout sur-groupe de G' (i.e. sous-groupe de G contenant G') est distingué dans G.

Les deux exercices suivants fournissent une sorte de réciproque, dans le cas de $\mathrm{SL}(E)$ et $\mathrm{GL}(E)$.

Exercice 7 (*Les sous-groupes distingués de* $\mathrm{SL}_n(k)$ *sont les sous-groupes du centre*)

1. Soit G un groupe de centre Z et H un sous-groupe. On suppose que $G = G'$ et $G = HZ$. Montrez que $G = H$.
2. On pose maintenant $G = \mathrm{SL}_n(k)$ et on écarte les cas particuliers où $n = 2$ et $|k| \leqslant 3$, de sorte que l'hypothèse $G = G'$ est vérifiée d'après le théorème 4 ci-dessus. Déduisez-en que tout sous-groupe distingué $H \lhd G$ distinct de G est inclus dans le centre Z.
(*Indication : considérez le sous-groupe HZ et utilisez la bijection entre sous-groupes distingués de G contenant Z et sous-groupes distingués de G/Z.*)

Exercice 8 (*Les sous-groupes distingués de* $\mathrm{GL}_n(k)$ *sont les sous-groupes du centre et les sur-groupes du groupe dérivé* $\mathrm{SL}_n(k)$)
On écarte les cas particuliers où $n = 2$ et $|k| \leqslant 3$. On note $G = \mathrm{GL}_n(k)$ et on considère un sous-groupe distingué $H \lhd G$.

1. Montrez que $H \cap \mathrm{SL}_n(k)$ est égal, soit à $\mathrm{SL}_n(k)$, soit à un sous-groupe $C \subset Z(\mathrm{SL}_n(k))$ qui est fini d'ordre d, avec $d|n$ et d inversible dans k.
2. On suppose que $H \cap \mathrm{SL}_n(k) = \mathrm{SL}_n(k)$ et on note M l'image de $\det : H \to k^\times$. Démontrez que
$$H = \det^{-1}(M) = \{g \in \mathrm{GL}_n(k),\ \det(g) \in M\}.$$
3. On suppose que $H \cap \mathrm{SL}_n(k) = C$ comme dans 1.
   (a) Soit $h \in H$ et $g \in G$. Démontrez qu'il existe $c \in C$ tel que $ghg^{-1} = ch$. (*Indication : regardez le déterminant de $ghg^{-1}h^{-1}$.*) Déduisez-en que $g^d hg^{-d} = h$.
   (b) Démontrez que toute transvection est une puissance d-ième. (*Indication : pensez à l'exercice 5 et montrez par exemple que $u_{a,f}$ est la puissance d-ième de $u_{(1/d)a,f}$.*)
   (c) Déduisez de ceci et de (a) et (b) que h commute avec toutes les transvections. Utilisant l'exercice 4, déduisez-en que h est une homothétie. Ainsi $H \subset Z(\mathrm{GL}_n(k))$.

En résumé, hors de cas où $n = 2$ et $|k| \leqslant 3$, les sous-groupes distingués de $\mathrm{GL}_n(k)$ se répartissent en deux familles, indicées par les sous-groupes $M \subset k^\times$:

- les sous-groupes $H_M := \det^{-1}(M) = \{g \in \mathrm{GL}_n(k),\ \det(g) \in M\}$, qui contiennent $\mathrm{SL}_n(k)$,
- les sous-groupes $H'_M := M \subset Z(\mathrm{GL}_n(k))$, inclus dans le centre.

3 Étude des groupes de transvections

Exercice 9 (*Commutants de groupes de transvections*)
On rappelle que dans un groupe G, le *commutant d'une partie* $A \subset G$ est l'ensemble des $g \in G$ qui commutent avec tous les éléments de A.

1. Soit u une transvection d'hyperplan H et de droite D. Démontrez que le commutant de u dans $\mathrm{GL}(E)$ est l'ensemble des $g \in \mathrm{GL}(E)$ tels que $g(H) = H$, $g(D) = D$ et que les homothéties induites par g sur les droites $H^\perp$ et D ont des rapports inverses. En une formule :
$$\mathrm{Comm}_{\mathrm{GL}(E)}(u) = \left\{ g \in \mathrm{GL}(E);\ g(H) = H,\ g(D) = D \text{ et } \left(\begin{smallmatrix} g_{H^\perp} & 0 \\ 0 & g_D \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}(H^\perp \oplus D)\} \right\}.$$
2. Démontrez que le commutant de $\mathrm{T}(H)$ dans $\mathrm{GL}(E)$ est égal au sous-groupe engendré par les homothéties et $\mathrm{T}(H)$, isomorphe à $Z \times \mathrm{T}(H)$ où Z est le centre de $\mathrm{GL}(E)$.

Exercice 10 (*Normalisateurs de groupes de transvections*)
On rappelle que dans un groupe G, le *normalisateur d'une partie* $A \subset G$ est l'ensemble des $g \in G$ tels que $g^{-1}Ag = A$. Démontrez que le normalisateur de $\mathrm{T}(H)$ dans $\mathrm{GL}(E)$ est égal au stabilisateur de H pour l'action de $\mathrm{GL}(E)$ sur E, c'est-à-dire à l'ensemble des $g \in \mathrm{GL}(E)$ tels que $g(H) = H$.

Exercice 11 (*Dualité dans la définition de transvection*)
Pour tout $u \in \mathrm{L}(E)$, on note u^* ou ${}^{\mathrm{t}}u$ la transposée de u, définie par $u^*(\varphi) = \varphi \circ u$.

1. Démontrez que $u : E \to E$ est une transvection d'hyperplan H et de droite D si et seulement si $u^* : E^* \to E^*$ est une transvection d'hyperplan $D^\perp$ et de droite $H^\perp$.
2. Pour souligner la dépendance en E, on utilise maintenant les notations $\mathrm{T}(E, H)$ et $\mathrm{U}(E, D)$ pour les groupes de transvections de $\mathrm{SL}(E)$ introduits dans l'exercice 5. Démontrez qu'on a un isomorphisme de groupes :
$$\begin{aligned} \mathrm{T}(E, H) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{U}(E^*, H^\perp) \\ u &\longmapsto u^*. \end{aligned}$$
3. Déduisez de ceci une démonstration par dualité des résultats de la question 2 de l'exercice 5.
4. En dualisant les résultats des exercices 9 et 10, décrivez le commutant et le normalisateur de $\mathrm{U}(E, D)$.

Références

[Pe96] D. Perrin, Cours d'algèbre, Ellipses, 1996.