Université de Rennes 1
Préparation à l'agrégation
de mathématiques
Auteur du document :

M. Coste

Agrégation interne 1998 – 2e épreuve

Corrigé rédigé par Michel Coste

Partie I

A – Suites presque convergentes et moyenne de Cesaro

1) Avec les notations de l'énoncé, $|P_n|$ est la partie entière de $\sqrt{n}$, donc $|P_n| \leq \sqrt{n}$ et $|P_n|/n \to 0$.

2/a) La suite (a_n) coïncide en dehors de P, qui est négligeable, avec la suite $(1/n)$ qui converge vers 0.

b) Non, la sous-suite (a_{n^2}) de la suite ci-dessus tend vers $+\infty$ et donc n'est pas presque convergente.

3/a) On peut éliminer le cas où b_n est nul à partir d'un certain rang (ceci ne peut se produire que si tous le a_n sont nuls) ; dans ce cas il suffit de prendre $u_n = 1/n$.

Posons $v_n = \sup_{p\geq n} b_p$ et $u_n = \sqrt{v_n}$. La suite (v_n) est une suite décroissante de réels strictement positifs, tend vers 0 car $b_n \to 0$, et $b_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. La suite (u_n) tend donc vers 0 en décroissant, et puisque $b_n/u_n \leq v_n/u_n = u_n$ on a bien $b_n/u_n \to 0$.

b) On a

$$b_n \geq \frac{1}{n}\left(\sum_{i\in T_n} a_i\right) \geq \frac{1}{n}\left(\sum_{i\in T_n} u_i\right) \geq \frac{|T_n|}{n}\, u_n\ .$$

Puisque $b_n/u_n \to 0$, il suit que $|T_n|/n \to 0$. Donc T est négligeable.

Puisque la suite (a_n) est une suite de réels ≥ 0 et qu'elle est majorée en dehors d'un ensemble négligeable par la suite (u_n) qui tend vers 0, on a $a_n \overset{\text{ps}}{\to} 0$.

4) Posons $a_n = (-1)^n\sqrt{n}$. Bien sûr, $|a_n| \to +\infty$. Par ailleurs

$$\begin{aligned} b_{2n} &= \frac{1}{2n}(\sqrt{2n} - \sqrt{2n-1} + \cdots + \sqrt{2} - \sqrt{1}) \\ &= \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{\sqrt{2n}+\sqrt{2n-1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}\right) \end{aligned}$$

tend vers 0 car c'est la moitié de la moyenne de Cesaro d'une suite tendant vers 0. Comme $b_{2n+1} - \frac{2n}{2n+1}b_{2n} = -1/\sqrt{2n+1}$ tend vers 0, on a aussi $b_{2n+1} \to 0$, et au total $b_n \to 0$.

Note. Sur les rapports entre convergence et convergence des moyennes de Cesaro, on a aussi : si (a_n) est une suite monotone de réels dont les moyennes de Cesaro convergent, alors (a_n) converge (en supposant (a_n) croissante, vérifier que si (a_n) n'est pas bornée, la suite de ses moyennes de Cesaro ne l'est pas non plus).

B – Encadrement d'une fonction définie par une intégrale

1) Puisque $|r^n \cos(nt)| \leq r^n$ et que $0 \leq r < 1$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(nt)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et donc P_r est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Elle est clairement périodique de période 2π. La convergence normale entraîne aussi (interversion de $\sum$ et $\int$) que $c_k(P_r) = c_k(1) + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (c_k(e^{int}) + c_k(e^{-int}))$. Comme, pour $\ell \in \mathbb{Z}$, $c_k(e^{i\ell t}) = 1$ si $k = \ell$ et 0 sinon, on conclut que $c_k(P_r) = r^{|k|}$.

2/a) On a

$$\begin{aligned} P(r,t) &= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} (re^{it})^n + \sum_{i=1}^{\infty} (re^{-it})^n = 1 + \frac{re^{it}}{1 - re^{it}} + \frac{re^{-it}}{1 - re^{-it}} \\ &= \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos t + r^2} = \frac{1 - r^2}{(1-r)^2 + 4r\sin^2(\frac{t}{2})} \ , \end{aligned}$$

la dernière égalité venant bien sûr de $\cos t = 1 - 2\sin^2(\frac{t}{2})$.

b) Puisque $|t/2| \leq \pi/2$, on a

$$\frac{t^2}{4} \geq \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \geq \frac{4}{\pi^2} \times \frac{t^2}{4} = \frac{t^2}{\pi^2} \ .$$

On en déduit

$$\frac{1 - r^2}{(1-r)^2 + rt^2} \leq P(r,t) \leq \frac{1 - r^2}{(1-r)^2 + 4r\frac{t^2}{\pi^2}} \ .$$

Puisque $0 \leq r < 1$, on a

$$\frac{1 - r}{(1-r)^2 + t^2} \leq \frac{1 - r^2}{(1-r)^2 + rt^2} \ .$$

Pour la majoration, puisque $\pi^2/4 \leq 3$, on a

$$\frac{1 - r^2}{(1-r)^2 + 4r\frac{t^2}{\pi^2}} \leq \frac{3(1 - r^2)}{(1-r)^2 + rt^2} \leq \frac{6(1 - r)}{(1-r)^2 + rt^2} \ .$$

3/a) Notons f la fonction que l'on intègre. Elle se prolonge par continuité en $r = O$ par 0. Par ailleurs f est positive et majorée par $\frac{6(1-r)}{rt^2}\left(\ln\frac{1}{r}\right)^{\alpha-1}$, qui est équivalent à $6(1-r)^{\alpha}$ quand r tend vers 1. Donc f se prolonge par continuité en $r = 1$ par 0. L'intégrale converge.

b) la fonction $r \mapsto \ln(1-r) + 2r$ est nulle en 0 et croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ (calcul facile). Donc $-\ln(1-r) \leq 2r$ pour $r \in [0, \frac{1}{2}]$. Puisque f est positive, on a

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \int_0^1 f(r)\,\mathrm{d}r = \int_0^1 f(1-r)\,\mathrm{d}r \geq \int_0^{\frac{1}{2}} f(1-r)\,\mathrm{d}r \\ &\geq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{r}{r^2 + t^2}(-\ln(1-r))^{\alpha-1}\,\mathrm{d}r \geq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{r}{r^2 + t^2}(2r)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}r \\ &\geq \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{r^{\alpha}}{r^2 + t^2}\,\mathrm{d}r \ . \end{aligned}$$

c) On a, en utilisant la majoration de 2/b) et le changement de variable $r \mapsto 1 - r$,

$$\psi(t) \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{6r}{r^2 + (1-r)t^2} \left(\ln \frac{1}{1-r}\right) \mathrm{d}r + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{6r}{r^2 + (1-r)t^2} \left(\ln \frac{1}{1-r}\right) \mathrm{d}r \ .$$

La première intégrale peut être majorée, en utilisant $1 - r \geq \frac{1}{2}$ et $\ln \frac{1}{1-r} \geq r$ pour $0 \leq r \leq \frac{1}{2}$, par

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{6r}{\frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{2}t^2} r^{\alpha-1} \, \mathrm{d}r = 12 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{r^\alpha}{r^2 + t^2} \, \mathrm{d}r \ .$$

La deuxième intégrale peut être majorée par

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{6}{r} (\ln 2)^{\alpha-1} \, dr = 6(\ln 2)^\alpha \leq 12 \ .$$

4) Evaluons l'intégrale

$$I(t) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{r^\alpha}{r^2 + t^2} \, dr$$

en faisant le changement de variable $r = |t|u$. On obtient

$$I(t) = |t|^{\alpha-1} \int_0^{\frac{1}{2|t|}} \frac{u^\alpha}{1 + u^2} \, \mathrm{d}u \ .$$

Posons

$$A = \int_0^{\frac{1}{2\pi}} \frac{u^\alpha}{1 + u^2} \, \mathrm{d}u \quad \text{et} \quad B = \int_0^{+\infty} \frac{u^\alpha}{1 + u^2} \, \mathrm{d}u$$

(remarquer que la deuxième intégrale est bien convergente). Avec les encadrements de 3), on obtient, pour $0 < |t| \leq \pi$,

$$\frac{A}{2} \, |t|^{\alpha-1} \leq \psi(t) \leq 12B|t|^{\alpha-1} + 12 \ .$$

En prenant $a = \frac{A}{2}$ et $b = 12(B + \pi^{1-\alpha})$, on a, pour $0 < |t| \leq \pi$,

$$a|t|^{\alpha-1} \leq \psi(t) \leq b|t|^{\alpha-1} \ .$$

Note. $P_r(t)$ est le *noyau de Poisson*. Voir Rudin, Real and Complex Analysis p. 118, avec la formule de représentation intégrale de Poisson.

Partie II – Sommes partielles de séries de Fourier

1/a) On a :

$$\int_0^\pi \left| \sum_{n=1}^N \varepsilon_n \sin nt \right|^2 \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^N \int_0^\pi \sin^2 nt \, \mathrm{d}t + \sum_{1 \leq n < p \leq N} (\varepsilon_n \overline{\varepsilon_p} + \varepsilon_p \overline{\varepsilon_n}) \int_0^\pi \sin nt \sin pt \, \mathrm{d}t \ .$$

Or $\int_0^\pi \sin^2 nt\,\mathrm{d}t = \pi/2$ et $\int_0^\pi \sin nt \sin pt\,\mathrm{d}t = 0$.

b) On découpe l'intégrale $\int_0^\pi \left|\sum_{n=1}^N \varepsilon_n \frac{\sin nt}{t}\right| dt$ en $\int_0^\delta + \int_\delta^\pi$. On majore la première intégrale par

$$\int_O^\delta \sum_{n=1}^N n\,\mathrm{d}t = \delta\,\frac{N(N+1)}{2} \le \delta N^2\ .$$

Pour majorer la deuxième intégrale, on utilise l'inégalité de Schwartz

$$\int_\delta^\pi \left|\sum_{n=1}^N \varepsilon_n \frac{\sin nt}{t}\right| \mathrm{d}t \le \left(\int_\delta^\pi \left|\sum_{n=1}^N \varepsilon_n \sin nt\right|^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\delta^\pi \frac{\mathrm{d}t}{t^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

et la majoration

$$\int_\delta^\pi \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{1}{\delta} - \frac{1}{\pi} \le \frac{1}{\delta}\ .$$

On obtient

$$\int_0^\pi \left|\sum_{n=1}^N \varepsilon_n \frac{\sin nt}{t}\right| \mathrm{d}t \le \delta N^2 + \frac{1}{\sqrt{\delta}} \left(\int_\delta^\pi \left|\sum_{n=1}^N \varepsilon_n \sin nt\right|^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\ .$$

c) En utilisant a) et b) on obtient

$$\int_0^\pi \left|\sum_{n=1}^N \varepsilon_n \frac{\sin nt}{t}\right| \mathrm{d}t \le \delta N^2 + \frac{1}{\sqrt{\delta}} \left(N\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\ .$$

En choisissant $\delta = \frac{1}{N} \in]0,\pi[$, on obtient pour le second membre $N + N\sqrt{\frac{\pi}{2}} \le 3N$.

d) En utilisant l'égalité (3) de l'énoncé on obtient

$$\left\|\sum_{n=1}^N \varepsilon_n D_n\right\|_1 \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi 2\left|\sum_{n=1}^N \varepsilon_n \frac{\sin nt}{t}\right| \mathrm{d}t + 2N\ ,$$

car puisque $|r_n(t)| \le 2$ on a $\|\varepsilon_n r_n\| \le 2$. En utilisant la parité de la fonction qu'on intègre et la majoration de c), on peut majorer l'intégrale du second membre par $4\times 3N = 12N$. On a donc $\|\sum_{n=1}^N \varepsilon_n D_n\| \le \frac{1}{2\pi}\,12N + 2N \le 5N$.

2) On définit $\varepsilon_n \in \mathbb{U}$ par $\varepsilon_n = |S_n(h,x_0) - h(x_0)|/(S_n(h,x_0) - h(x_0))$ si $S_n(h,x_0) \ne h(x_0)$ et $\varepsilon_n = 1$ sinon. Alors

$$\begin{aligned} T_N(h) &= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N \varepsilon_n(S_n(h,x_0) - h(x_0)) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi h(x_0-t)\left(\sum_{n=1}^N \varepsilon_n \frac{D_n(t)}{N}\right) \mathrm{d}t - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N \varepsilon_n h(x_0)\ . \end{aligned}$$

On en déduit

$$T_N(h) \le \|h\|_\infty \left(\frac{1}{N}\left\|\sum_{n=1}^N \varepsilon_n D_n\right\|_1 + 1\right) \le 6\|h\|_\infty\ .$$

3/a) On a

$$f_n(x+h) - f_n(x) = n\left(\int_{x+\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{x}^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t\right) .$$

D'après la propriété de la moyenne, il existe y entre x et $x+h$ et z entre $x+\frac{1}{n}$ et $x+\frac{1}{n}+h$ tels que $f_n(x+h)-f_n(x) = nh(f(z)-f(y))$. Donc f_n est dérivable et $f'_n(x) = n(f(x+\frac{1}{n})-f(x))$. La fonction f_n est continûment dérivable, et elle est clairement périodique de période 2π. Donc f_n appartient à E_1.

b) La fonction f étant continue et périodique, elle est uniformément continue. Par conséquent $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.

4) La fonction g étant continûment dérivable satisfait les hypothèse du théorème de Dirichlet sur la limite des séries de Fourier. Donc $|S_n(g,x_0)-g(x_0)| \to 0$. En prenant la moyenne de Cesaro, on a $T_N(g) \to 0$.

5/a) Comme $S_n(f,x_0)$ est linéaire en f on a

$$T_N(f) \leq T_N(f-g) + T_N(g) \leq T_N(g) + 6\|f-g\|_\infty ,$$

la dernière inégalité venant de 2).

b) Montrons que $T_N(f) \to 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $g \in E_1$ tel que $\|f-g\|_\infty \leq \varepsilon/12$ d'après 3/b). Il existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $T_N(g) \leq \varepsilon/2$ pour tout $N \geq N_0$ d'après 4). Donc $T_N(f) \leq \varepsilon$ pour tout $N \geq N_0$.

Puisque $T_N(f) \to 0$, le résultat de I-A-3 montre que $S_n(f,x_0) \stackrel{\text{ps}}{\to} f(x_0)$

Note. Cette partie est un raffinement du théorème de Féjer sur la convergence des moyennes de Cesaro des sommes partielles de séries de Fourier : voir Zuily-Queffelec p. 81, Théorème III.2. L'égalité $D_n(t) = 2\,\frac{\sin nt}{t} + r_n(t)$ avec $|r_n(t)| \leq 2$ pour $|t| \leq \pi$ est montrée chez Z-Q p. 74, à ceci près qu'on a seulement $|r_n(t)|$ majoré par une constante finie (la valeur de cette constante importe d'ailleurs peu pour les raisonnements).

Le résultat de la question 1 et à rapprocher du fait que $\|K_N\|_1 = 1$, où $K_N = \frac{1}{N}(D_0 + \cdots + D_{N-1})$ est le noyau de Fejer.

Partie III – Sous-suites de la suite des sommes partielles

1) Posons $W_n(f) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} |S_{\lambda_n}(f,x_0) - f(x_0)|$. En utilisant l'hypothèse (4), on montre comme dans II-2) que $W_N(h) \leq (c+1)\|h\|_\infty$ pour $h \in E$. On peut ensuite recopier le raisonnement de la fin de la partie II, en remplaçant 6 par $c+1$, pour arriver à la conclusion $S_{\lambda_n}(f,x_0) \stackrel{\text{ps}}{\to} f(x_0)$.

2/a) On peut déjà remarquer que les intégrales convergent bien car $\left(\ln \frac{1}{r}\right)^{\alpha-1} \sim (1-r)^{\alpha-1}$ quand $r \to 1_-$. Calculons maintenant, en effectuant le changement de variable $s = r^{n+1}$:

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha) &= \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{\alpha-1} \mathrm{d}s = \int_0^1 (n+1)^{\alpha-1}\left(\ln\frac{1}{r}\right)^{\alpha-1} (n+1)r^n\,\mathrm{d}r \\ &= (n+1)^\alpha \int_0^1 r^n \left(\ln \frac{1}{r}\right)^{\alpha-1} \mathrm{d}r ,\end{aligned}$$

ce qui donne bien l'égalité recherchée.

b) Posons $\varphi_N(t) = 1 + 2\sum_{n=1}^N \frac{\cos nt}{(n+1)^\alpha}$. La suite $(\varphi_N$ converge uniformément sur tout compact contnu dans $[-\pi, 0[\cup]0, \pi]$ vers φ. En effet,

$$\left|\sum_{n=1}^N \cos nt\right| = \left|\Re\left(\frac{e^{it} - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}}\right)\right| \leq \frac{2}{1 - \cos t}$$

est uniformément borné sur un tel compact, et on peut appliquer le critère d'Abel uniforme. On peut déjà conclure que φ est continue sur $[-\pi, 0[\cup]0, \pi]$.

En utilisant a) et en calculant $(1 + 2\sum_{n=1}^N r^n \cos nt)$ par un calcul semblable à celui de I-B-2/a), on a

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha)\varphi_N(t) &= \int_0^1 (1 + 2\sum_{n=1}^N r^n \cos nt)\left(\ln\frac{1}{r}\right)^{\alpha-1} \mathrm{d}r \\
&= \int_0^1 \frac{1 - r^2 + 2r^{N+1}(r\cos Nt - \cos(N+1)t)}{1 - 2r\cos t + r^2}\left(\ln\frac{1}{r}\right)^{\alpha-1} \mathrm{d}r\ .
\end{aligned}$$

Fixons t avec $0 < |t| \leq \pi$, et soit $m > 0$ le minimum de $1 - 2r\cos t + r^2 = (1-r)^2 + 4r\sin^2(\frac{t}{2})$ pour $r \in [0, 1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $r \in [0, 1]$ on a

$$\left|\frac{1 - r^2 + 2r^{N+1}(r\cos Nt - \cos(N+1)t)}{1 - 2r\cos t + r^2}\right| \leq \frac{5}{m}\ .$$

Comme l'intégrale $\int_0^1 \frac{5}{m}\left(\ln\frac{1}{r}\right)^{\alpha-1} \mathrm{d}r$ est convergente, on conclut par le théorème de convergence dominée que $\Gamma(\alpha)\varphi_N(t)$ converge vers $\int_0^1 P(r,t)\left(\ln\frac{1}{r}\right)^{\alpha-1} \mathrm{d}r = \psi(t)$.

On peut aussi utiliser la majoration

$$\left|P(r,t) - \frac{1 - r^2 + 2r^{N+1}(r\cos Nt - \cos(N+1)t)}{1 - 2r\cos t + r^2}\right|$$
$$\leq \frac{2r^{N+1}}{m}|r\cos Nt - \cos(N+1)t| \leq \frac{4}{m}r^{N+1}$$

pour établir

$$|\psi(t) - \Gamma(\alpha)\varphi_N(t)| \leq \int_0^1 \frac{4}{m}r^{N+1}\left(\ln\frac{1}{r}\right)^{\alpha-1} \mathrm{d}r = \frac{4\Gamma(\alpha)}{m(N+2)^\alpha}\ ,$$

la dernière égalité venant de 2/a).

3/a) Il faut vérifier la convergence de

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t)e^{-ikt}|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi\Gamma(\alpha)}\int_{-\pi}^{\pi} \psi(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Le problème de convergence est bien sûr en 0. Mais la majoration $\psi(t) = O(|t|^{\alpha-1})$ établie en I-B-4) assure la convergence de l'intégrale.

b) On invoque le théorème de Fubini pour justifier l'interversion de l'intégrale :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^1 P(r,t)\left(\ln\frac{1}{r}\right)^{\alpha-1} \mathrm{d}r\right) e^{-ikt}\mathrm{d}t =$$
$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} P(r,t)e^{-ikt}\,\mathrm{d}t\right)\left(\ln\frac{1}{r}\right)^{\alpha-1} \mathrm{d}r\ .$$

La justification de l'application du théorème de Fubini vient de a) qui dit que

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^1\left|P(r,t)\left(\ln\frac{1}{r}\right)^{\alpha-1}e^{-ikt}\right|\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}t<\infty\ .$$

En utilisant ensuite $c_k(P_r)=r^{|k|}$ et 2/a) on obtient :

$$c_k(\varphi)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 c_k(P_r)\left(\ln\frac{1}{r}\right)^{\alpha-1}\mathrm{d}r=\frac{1}{(|k|+1)^\alpha}\ .$$

4/a) Le développement

$$\left|\sum_{n=1}^N\varepsilon_n e^{i\lambda_n t}\right|^2=N+\sum_{\substack{1\le j,k\le n\\ j\ne k}}\varepsilon_j\overline{\varepsilon_k}\,e^{-i(\lambda_k-\lambda_j)t}$$

donne immédiatement

$$I_N=N+\sum_{\substack{1\le j,k\le n\\ j\ne k}}\varepsilon_j\overline{\varepsilon_k}\,c_{\lambda_k-\lambda_j}(\varphi)\ .$$

Majorons

$$\sum_{\substack{1\le j,k\le n\\ j\ne k}}\varepsilon_j\overline{\varepsilon_k}\,c_{\lambda_k-\lambda_j}(\varphi)\le 2\sum_{1\le j<k\le N}\frac{1}{(1+\lambda_k-\lambda_j)^\alpha}\ .$$

La condition (ii) sur la suite (λ_n) entraîne que $\lambda_k-\lambda_j\ge\lambda_{k-j}$. On a donc pour j fixé entre 1 et N,

$$\sum_{j<k\le N}\frac{1}{(1+\lambda_k-\lambda_j)^\alpha}\le\sum_{j<k\le N}\frac{1}{(\lambda_{k-j})^\alpha}\le AN\lambda_N^{-\alpha}\ ,$$

la deuxième inégalité venant de la condition (iii). On a donc en faisant varier j entre 1 et N

$$\sum_{1\le j<k\le N}\frac{1}{(1+\lambda_k-\lambda_j)^\alpha}\le AN^2\lambda_N^{-\alpha}\ ,$$

d'où, puisque $1=\lambda_0\le AN\lambda_N^{-\alpha}$ d'après (iii),

$$I_N\le N+2AN^2\lambda_N^{-\alpha}\le 3AN^2\lambda_N^{-\alpha}\ .$$

b) On a

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=1}^n\varepsilon_n\sin\lambda_n t\right|^2 &\le \left(\frac12\left|\sum_{n=1}^N\varepsilon_n e^{i\lambda_n t}\right|+\frac12\left|\sum_{n=1}^N\varepsilon_n e^{-i\lambda_n t}\right|\right)^2\\ &\le \frac12\left|\sum_{n=1}^N\varepsilon_n e^{i\lambda_n t}\right|^2+\frac12\left|\sum_{n=1}^N\varepsilon_n e^{-i\lambda_n t}\right|^2\ ,\end{aligned}$$

et par ailleurs la parité de φ entraîne

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{n=1}^{N}\varepsilon_n e^{-i\lambda_n t}\right|^2 \varphi(t)\,\mathrm{d}t = I_N\ .$$

Donc

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{n=1}^{N}\varepsilon_n \sin\lambda_n t\right|^2 \varphi(t)\,\mathrm{d}t \le I_N\ .$$

c) On procède de la même manière qu'en II-1/b. On majore l'intégrale de 0 à δ par $\delta N\lambda_N$ car

$$\left|\varepsilon_n \frac{\sin\lambda_n t}{t}\right| \le \lambda_n \le \lambda_N\ .$$

On majore l'intégrale de δ à π au moyen de l'inégalité de Schwarz par

$$\left(\int_{\delta}^{\pi} t^{-\alpha-1}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\delta}^{\pi}\left|\sum_{n=1}^{N}\varepsilon_n \sin\lambda_n t\right|^2 t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\ .$$

Le premier facteur se majore par $(\alpha+1)^{-1/2}\delta^{-\alpha/2}$. Le deuxième se majore par $\left(\frac{\pi\Gamma(\alpha)}{a}\right)^{1/2}\sqrt{I_N}$, où a est la constante du I-B-4). Au total, il existe une constante strictement positive B telle que

$$\int_{0}^{\pi}\left|\sum_{n=1}^{N}\varepsilon_n \frac{\sin\lambda_n t}{t}\right|\mathrm{d}t \le \delta N\lambda_N + B\delta^{-\alpha/2}\sqrt{I_N}\ .$$

5) En choisissant $\delta = 1/\lambda_N$ dans la majoration ci-dessus et en utilisant la majoration de I_N du 4/a), on obtient

$$\int_{0}^{\pi}\left|\sum_{n=1}^{N}\varepsilon_n \frac{\sin\lambda_n t}{t}\right|\mathrm{d}t \le CN\ ,$$

où C est une constante strictement positive. On en déduit comme en II-1/d) que

$$\|\sum_{n=1}^{N}\varepsilon_n D_{\lambda_n}\|_1 \le (C+2)N\ .$$

Note. Vérifier que la fonction Γ est bien celle définie habituellement par $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$.