L'indispensable sur les espaces de Banach

Je rappelle que la complétude d'un espace métrique est équivalente à la propriété des "segments emboîtés" : toute intersection dénombrable décroissante de boules fermées est d'intersection non vide.

Théorème 1. (Baire) *Dans un espace métrique complet, pour toute réunion dénombrable de fermés $(F_n)_{n\geqslant 1}$ remplissant l'espace, l'un d'entre eux contient une boule ouverte.*

Démonstration – Sans quoi toute boule ouverte B contiendrait pour chaque $n \geqslant 1$ un point x_n qui ne serait pas dans le fermé F_n. C'est donc toute une boule ouverte de B, de centre x_n qui ne rencontrerait pas F_n. Une boule fermée de rayon un peu plus petit a la même propriété. On pourrait donc fabriquer par récurrence une suite B_n décroissante de boules fermées, de rayon tendant vers 0, telles que $\overline{B}_n$ ne rencontre aucun des fermés $F_1, \dots, F_n$. L'espace étant complet, l'intersection non vide des $\overline{B}_n$ contiendrait un point n'appartenant à aucun des fermés F_n, en contradiction avec l'hypothèse $E = \bigcup_{n\geqslant 1} F_n$. ▷

Je rappelle qu'une sermi-norme sur un espace vectoriel est une 'norme' qui peut avoir des vecteurs non nuls de taille nulle.

Théorème 2. (Zabrejko) *Soit maintenant $(Z, |\cdot|)$ un espace de Banach et $p : Z \to \mathbb{R}^+$ une semi-norme telle que pour toute série convergeant $\sum_{n\geqslant 0} z_n$ dans Z on a*

$$p\Big(\sum_{n\geqslant 0} z_n\Big) \leqslant \sum_{n\geqslant 0} p(z_n). \tag{0.1}$$

Il existe alors une constante M telle que $p(\cdot) \leqslant M|\cdot|$.

Démonstration – Il suffit de voir que p est bornée sur la boule unité fermée $\overline{B}$ de Z puisque

$$p(\lambda z) = |\lambda| p(z), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, z \in Z. \tag{0.2}$$

Comme $Z = \bigcup_{n\geqslant 1} \overline{\{p \leqslant n\}}$ l'un des fermés $\overline{\{p \leqslant n\}}$ est d'intérieur non vide, disons $\overline{\{p \leqslant n_0\}}$. Notons $z_0 + r_0\overline{B}$ une boule fermée incluse dans $\overline{\{p \leqslant n_0\}}$. On a $p(\overline{B}) \leqslant (n_0 + p(-z_0))/r_0 =: m_0$ d'après la propriété de positive homogénéité (0.2), si bien que $\overline{B} \subset \overline{\{p \leqslant m_0\}}$. On peut alors utiliser la propriété élémentaire suivante, dont la démonstration vous est laissée.

Lemme – *Si $\overline{B}$ est incluse dans l'adhérence d'un ensemble $\mathcal{E}$ alors tout point z de $\overline{B}$ s'écrit sous la forme*

$$z = \sum_{n\geqslant 1} 2^{-(n-1)} z_n$$

avec $z_n \in \mathcal{E}$.

On a alors pour tout z de la boule fermée $\overline{B}$

$$p(z) = p\Big(\sum_{n\geqslant 1} 2^{-(n-1)} z_n\Big) \leqslant \sum_{n\geqslant 1} 2^{-(n-1)} p(z_n) \leqslant 2m_0.$$

▷

Pour une application linéaire $T : E \to F$ entre espaces vectoriels normés je note $|||T|||$ sa norme d'opérateur. Je note aussi $a \lesssim b$ si $a \leqslant mb$ pour une constante positive m.

Théorème 3. (Banach & co) *Soit $(E, |\cdot|)$ un espace de Banach et $(F, |\cdot|_F)$ un espace vectoriel normé.*

- *Supposons que F est aussi un espace de Banach. Pour qu'une application linéaire $T : E \to F$ soit continue il suffit que son graphe $\big\{\big(x, T(x)\big)\big\}_{x\in E}$ soit un sous-ensemble fermé de $E \times F$.*

- *Soit $(T)_{T\in\mathcal{T}}$ une famille d'applications linéaires continues de E dans F. Il suffit d'avoir*
$$\sup_{T\in\mathcal{T}} |T(x)|_F < \infty$$
pour chaque $x \in E$, pour avoir
$$\sup_{T\in\mathcal{T}} |||T||| < \infty$$
- *Supposons que F est aussi un espace de Banach, et soit $T : E \to F$ une bijection continue. Alors $T^{-1} : F \to E$ est aussi continue :*
$$|x| \lesssim \big|T(x)\big|_F \lesssim |x|, \quad \forall x \in E.$$

Démonstration – • Le premier point constitue le théorème du graphe fermé. On l'obtient en corollaire du résultat de Zabrejko en travaillant sur l'espace de Banach E en prenant $p(x) = \big|T(x)\big|_F$. Pour la vérification, on ne perd rien à prendre une suite x_n d'éléments de E telle que $\sum_k \big|T(x_k)\big|_F < \infty$. Comme F est un espace de Banach la somme $\sum_k T(x_k)$ est convergente. Si donc la somme $\sum_k x_k$ est convergente dans E l'hypothèse nous assure que $\sum_k T(x_k) = T\big(\sum_k x_k\big)$, et la conclusion vient de ce que les sommes partielles vérifient $\big|\sum_{k\leqslant\ell} T(x_k)\big| \leqslant \sum_n \big|T(x_n)\big|$ pour tout ℓ.

• Le second point constitue le théorème de Banach-Steinhaus, démontré indépendamment par Hahn et Hildebrandt. On l'obtient en corollaire du résultat de Zabrejko en travaillant sur l'espace de Banach E en prenant $p(x) = \sup_{T\in\mathcal{T}} \big|T(x)\big|_F$.

• Le troisième point constitue le théorème de "l'application ouverte". On l'obtient en corollaire du résultat de Zabrejko en travaillant sur l'espace de Banach F en prenant $p(y) = |x|$, avec $T(x) = y$. Si l'application T est juste surjective, on peut encore utiliser le résultat de Zabrejko en travaillant sur l'espace de Banach F en prenant $p(y) = \inf\big\{|x|\,;\, T(x) = y\big\}$. La conclusion qui s'ensuit est le fait que T est ouverte : elle envoie un ouvert de E sur un ouvert de F. Pensez au cas particulier de l'identité sur un espace muni de deux normes, en faisant chacune un espace de Banach.

Je vous laisse vérifier dans chaque les deux derniers cas que la condition (0.1) de Zabrejko est bien satisfaite. ▷

L'énoncé suivant donne une version du théorème de Lax-Milgram qui fonctionne sur des espaces de Banach. Ce type de résultat est utilisé en particulier pour résoudre des EDPs, une fois celles-ci reformulées sous une forme ad hoc.

Théorème 4. (Babuska) *Soit Z_1 et Z_2 deux espaces de Banach. On associe à une application linéaire continue $a \in L_c(Z_1 \times Z_2, \mathbb{R})$ l'application $\overline{a} : Z_1 \to Z_2'$, définie pour chaque $z_1 \in Z_1$ par la formule*
$$\overline{a}(z_1)(z_2) = a(z_1, z_2), \quad \forall z_2 \in Z_2.$$
L'application $\overline{a}$ est bijective ssi ${}^t\overline{a} : Z_2 \to Z_1'$ est injective et il existe $\alpha > 0$ tel que
$$|||\overline{a}(z_1)||| \geqslant \alpha |z_1|, \quad \forall z_1 \in Z_1. \tag{0.3}$$

Notez que l'injectivité de ${}^t\overline{a} : Z_2 \to Z_1'$, est équivalente à l'identité $\cap_{z_1\in Z_1} \ker \overline{a}(z_1) = \{0\}$ lorsque Z_2 est réflexif ; c'est le cas si Z_2 est un espace de Hilbert.

Démonstration – Supposons $\overline{a}$ bijective. On a d'abord
$$\ker({}^t\overline{a}) = \overline{\Im m(\overline{a})}^{\perp} = 0. \tag{0.4}$$
Le théorème de l'application ouverte nous dit par ailleurs que l'inverse (ensembliste) de l'application $\overline{a}$ est continu, ce que traduit l'estimée (0.3).
Réciproquement, on voit sur l'identité (0.4) que $\Im m(\overline{a})$ est dense dans Z_2'. L'estimée de continuité (0.3) donne à la fois que $\overline{a}$ est injective et que son image est fermée. (Une suite de Cauchy dans l'image de $\overline{a}$ provient d'une suite de Cauchy de Z_1 ; la continuité de $\overline{a}$ fait le reste.) ▷