Mathématiques Générales 1993 - Corrigé

Michel Coste *

11 décembre 2012

PARTIE I Exemples de fonctions vérifiant des équations différentielles algébriques sur $\mathbb{C}$

Pour un polynôme P en plusieurs variables, on note $\deg P$ son degré total et $\deg_{X_i} P$ son degré par rapport à la variable X_i. On convient que le degré du polynôme nul est $-\infty$.

I.1. **L'application exponentielle réelle**

a. L'ensemble des e^z pour z parcourant $\mathbb{R}$ est infini. Donc, si $P(e^z) = 0$ pour tout $z \in \mathbb{R}$, le polynôme P est nul.

b. On a $f' = f$, et donc $Q = X_1 - X_0$ vérifie $Q(f, f') = 0$.

c. Si $P = (X_1 - X_0)\,R$, alors $P(f, f') = (f' - f)\,R(f) = 0$. Réciproquement, supposons $P(f, f') = 0$. On fait la division euclidienne de P par $X_1 - X_0$ par rapport à la variable X_1 ($X_1 - X_0$ est unitaire en X_1) :

$$P = (X_1 - X_0)\,R + S \quad \text{avec } \deg_{X_1} S < 1\;. \tag{1}$$

On a donc $S \in \mathbb{C}[X_0]$. De (1) on tire $0 = P(f, f') = (f' - f)\,R(f, f') + S(f) = S(f)$, d'où $S = 0$ d'après a.

d. On a $f'' = f' = f$, donc si $P = (X_1 - X_0)\,R + (X_2 - X_0)\,S$ on obtient $P(f, f', f'') = (f' - f)\,R(f, f', f'') + (f'' - f)S(f, f', f'') = 0$. Réciproquement, supposons $P(f, f', f'') = 0$. On fait la division euclidienne de P par $X_2 - X_0$ par rapport à la variable X_2 ($X_2 - X_0$ est unitaire en X_2) :

$$P = (X_2 - X_0)\,S + T \quad \text{avec } \deg_{X_2} T < 1\;. \tag{2}$$

On a donc $T \in \mathbb{C}[X_0, X_1]$. De (2) on tire $0 = P(f, f', f'') = (f'' - f)\,S(f, f', f'') + T(f) = T(f)$, et ainsi il existe $R \in \mathbb{C}[X_0, X_1] \subset \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$ tel que $T = (X_1 - X_0)\,R$ d'après d ; au final, $P = (X_1 - X_0)\,R + (X_2 - X_0)\,S$.

e. $0 \in J$, J est stable par addition et pour tout $P \in J$ et tout $S \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$ on a $S\,P \in J$; ceci montre que J est un idéal de $\mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$. S'il était principal engendré par U, alors U devrait diviser $X_1 - X_0 \in J$ et donc $\deg_{X_2} U = 0$; de même U devrait diviser $X_2 - X_0 \in J$ et donc $\deg_{X_1} U = 0$. On aurait un polynôme $U \neq 0$ de $\mathbb{C}[X_0]$ tel que $U(f) = 0$, ce qui contredit a.

I.2. **L'application $u \mapsto \sin u$.**

a. L'ensemble des $\sin u$ pour u parcourant $\mathbb{R}$ est infini. Donc, si $P(\sin u) = 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}$, le polynôme P est nul.

b. $f'(u) = \cos u$ et si $Q = X_0^2 + X_1^2 - 1$ on a $Q(f, f') = 0$.

c. On a

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad U(\sin u)\,\cos u + V(\sin u) = 0\;. \tag{3}$$

Par le changement de variable $u \mapsto \pi - u$ on obtient

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad -U(\sin u)\,\cos u + V(\sin u) = 0\;. \tag{4}$$

De (3) et (4) on tire $V(\sin u) = 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}$, et donc $V = 0$ d'après a. On tire aussi $U(\sin u)\,cosu = 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}$, donc $U(\sin u) = 0$ pour tout u qui n'est pas de la forme $\pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, et finalement par continuité $U(\sin u) = 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. Donc $U = 0$ d'après a.

*remarques et questions bienvenues à michel.coste@univ-rennes1.fr

d. J est un idéal (comme dans I.1.e). Montrons que l'élément $Q = X_0^2 + X_1^2 - 1$ de J engendre J. Soit $P \in J$, et faisons la division euclidienne de P par Q (unitaire en X_1) par rapport à la variable X_1 :

$$P = Q\,R + S \quad \text{avec } \deg_{X_1} S < 2\,. \tag{5}$$

On a donc $S = U\,X_1 + V$ avec $U, V \in \mathbb{C}[X_0]$. De (5) on tire $0 = P(f, f') = (f^2 + f'^2 - 1)\,R(f, f') + U(f)\,f' + V(f) = U(f)\,f' + V(f)$. D'après c, on a $U = V = 0$ et Q divise bien P.

e. L est bien un idéal de $\mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$, qui contient $X_0^2 + X_1^2 - 1$ et $X_0 + X_2$. Si L était un idéal principal engendré par W, on aurait $\deg_{X_2}(W) = 0$ car W divise $X_0^2 + X_1^2 - 1$. et $\deg_{X_1} W = 0$ car W divise $X_0 + X_2$. Ainsi $W \in \mathbb{C}[X_0]$ mais alors $W = 0$ par a, ce qui est absurde car $L \neq \{0\}$. Donc L n'est pas principal.

I.3. **L'application $u \mapsto e^{u^2}$.**

a. Soit $P \in \mathbb{C}[X_0, X_1]$ non nul. Soit $d = \deg P$ et soit e le degré par rapport à X_1 de la partie homogène de degré d de P :

$$P = a_{d-e,e} X_0^{d-e} X_1^e + + a_{d-e+1,e-1} X_0^{d-e+1} X_1^{e-1} + \cdots + a_{d,0} X_0^d + \sum_{i+j<d} a_{i,j} X_0^i X_1^j \quad \text{où } a_{d-e,e} \neq 0\,.$$

On a $f'(u) = 2ue^{u^2}$ et donc

$$P(f, f')(u) = u^e e^{du^2} \left(2^e a_{d-e,e} + 2^{e-1} a_{d-e+1,e-1} u^{-1} + \cdots + a_{d,0} u^{-e} + \sum_{i+j<d} 2^j a_{i,j} u^{j-e} e^{(i+j-d)u^2} \right)$$

est équivalent à $2^e a_{d-e,e} u^e e^{du^2}$ quand u tend vers $+\infty$. On ne peut donc pas avoir $P(f, f') = 0$.

b. On a $f''(u) = (4u^2 + 2)e^{u^2}$. Donc $f''(u)f(u) = (4u^2 + 2)e^{2u^2} = f'(u)^2 + 2f(u)^2$. Le polynôme $Q = X_2 X_0 - X_1^2 - 2X_0^2$ vérifie $Q(f, f', f'') = 0$.

Montrons que Q est irréductible dans $\mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$, ça nous servira plus tard. Puisque Q est de degré 1 en X_2, toute factorisation de Q est de la forme $Q = U\,(X_2 V + W)$ avec $U, V, W \in \mathbb{C}[X_0, X_1]$. Le polynôme U est un diviseur commun de X_0 et de $-X_1^2 - 2X_0^2$ dans $\mathbb{C}[X_0, X_1]$. Comme X_0 est irréductible et ne divise pas $-X_1^2 - 2X_0^2$, U est inversible. Ceci montre que Q est irréductible.

c. Montrons que le polynôme Q du b engendre J. Soit $P \in J$. On fait la division euclidienne de P par Q dans l'anneau de polynômes en X_2 à coefficients dans le corps de fractions rationnelles $\mathbb{C}(X_0, X_1)$. Puisque Q est de degré 1 en X_2, le reste est un élément de $\mathbb{C}(X_0, X_1)$. En chassant les dénominateurs, on obtient $SP = QT + R$ avec $R, S \in \mathbb{C}[X_0, X_1]$, S non nul et $T \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$. On en déduit $0 = S(f, f')P(f, f', f'') = Q(f, f', f'')T(f, f', f'') + R(f, f') = R(f, f')$. D'après a, on a $R = 0$ et donc $SP = QT$ dans l'anneau factoriel $\mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$. Comme Q est irréductible dans cet anneau et ne divise pas S, Q divise P. Ceci montre que J est engendré par Q.

Il fallait bien faire attention ici au fait que le coefficient dominant de Q, considéré comme polynôme en X_2 à coefficients dans $\mathbb{C}[X_0, X_1]$, n'est pas inversible dans $\mathbb{C}[X_0, X_1]$. On ne peut donc faire la division euclidienne qu'à condition de se placer dans un anneau de coefficients où X_0 devient inversible.

PARTIE II Solutions holomorphes d'une équation fonctionnelle

II.1 a. Montrons par récurrence sur n que

$$(1 - \rho) \prod_{k=0}^{n} (1 + \rho^{2^k}) = 1 - \rho^{2^{n+1}}\,.$$

Pour $n = 0$, on a $(1 - \rho)(1 + \rho) = 1 - \rho^2$, et si l'égalité est vérifiée pour n on a

$$(1 - \rho) \prod_{k=0}^{n+1} (1 + \rho^{2^k}) = (1 - \rho) \prod_{k=0}^{n} (1 + \rho^{2^k}) \times (1 + \rho^{2^{n+1}}) = (1 - \rho^{2^{n+1}})\,(1 + \rho^{2^{n+1}}) = 1 - \rho^{2^{n+2}}\,.$$

Donc, puisque $0 \leq \rho < 1$

$$\prod_{k=0}^{n} (1 + \rho^{2^k}) = \frac{1 - \rho^{2^{n+1}}}{1 - \rho} \leq \frac{1}{1 - \rho}\,.$$

b. On a $\theta_n(z) - \theta_{n+1}(z) = \theta_n(z)\, z^{2^{n+1}}$. Par ailleurs, d'après a., on a pour tout $z \in \Delta$ la majoration

$$|\theta_n(z)| = \prod_{k=0}^{n} |1 - z^{2^k}| \leq \prod_{k=0}^{n} (1 + |z|^{2^k}) \leq \frac{1}{1 - |z|} \ .$$

Par conséquent, pour tout $z \in \Delta$, on obtient

$$|\theta_n(z) - \theta_{n+1}(z)| \leq \frac{|z|^{2^{n+1}}}{1 - |z|} \ .$$

c. Pour tout $p > n$, on a d'après b., pour tout $|z| \in \Delta$:

$$|\theta_n(z) - \theta_{n+p}(z)| \leq \frac{\sum_{k=1}^{p} |z|^{2^{n+k}}}{1 - |z|} \leq |z|^{2^{n+1}} \frac{\sum_{\ell=0}^{\infty} |z|^{\ell}}{1 - |z|} = \frac{|z|^{2^{n+1}}}{(1 - |z|)^2} \ . \tag{6}$$

La suite $(\theta_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie donc le critère de Cauchy, et elle est convergente. Ceci montre que la suite de fonctions (θ_n) converge simplement vers une fonction θ sur Δ.

d. Par passage à la limite pour $p \to \infty$ dans la majoration (6), on obtient pour tout z vérifiant $|z| \leq \rho < 1$,

$$|\theta_n(z) - \theta(z)| \leq \frac{\rho^{2^{n+1}}}{(1 - \rho)^2} \ .$$

Ainsi la suite (θ_n) converge vers θ uniformément sur tout compact contenu dans Δ. Comme les θ_n sont holomorphes (ce sont des polynômes), on en déduit que θ est holomorphe sur Δ.

II.2 a. Pour tout $z \in \Delta$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\theta_{n+1}(z) = (1 - z)\,\theta_n(z^2)$ et donc, en passant à la limite pour $n \to \infty$, $\theta(z) = (1 - z)\,\theta(z^2)$.

b. Supposons qu'il existe $z_0 \in \Delta$ tel que $\theta(z_0) = 0$. Alors, d'après a. on a $(1 - z_0)\theta(z_0^2) = 0$, d'où $\theta(z_0^2) = 0$ puisque $z_0 \neq 1$. Un récurrence facile montre que $\theta(z_0^{2^n}) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $\lim_{n\to\infty} z_0^{2^n} = 0$, on en déduit par continuité $\theta(0) = 0$. Ceci est impossible, car $\theta_n(0) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\theta(0) = 1$.

La continuité suffit ici, on n'a pas besoin de faire appel au théorème des zéros isolés. Et si l'on fait appel à ce théorème, il faut montrer que θ n'est pas identiquement nulle.

c. Soit g le quotient f/θ ; c'est une fonction continue sur Δ, qui vérifie $g(z) = g(z^2)$ pour tout $z \in \Delta$. Soit $z_0 \in \Delta$. Par une récurrence facile $g(z_0) = g(z_0^{2^n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or $\lim_{n\to\infty} z_0^{2^n} = 0$ et par continuité de g on obtient $g(z_0) = g(0)$. Ceci montre que g est constante sur Δ, et donc $f = f(0)\,\theta$.

II.3 a. La fontion $t \mapsto e^t$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et envoie Π dans Δ car $|e^t| = e^{\mathrm{Re}(t)}$. Comme θ est holomorphe sur Δ et ne s'y annule pas, la fontion

$$\phi : t \longmapsto \frac{e^t\, \theta'(e^t)}{\theta(e^t)}$$

est holomorphe sur Π.

b. En dérivant la relation fonctionnelle obtenue en II.2.a., on obtient $\theta'(z) = -\theta(z^2) + 2z(1-z)\theta'(z^2)$. On en déduit

$$\phi(t) = \frac{e^t\, \theta'(e^t)}{\theta(e^t)} = \frac{e^t\,(-\theta(e^{2t}) + 2e^t(1 - e^t)\,\theta'(e^{2t}))}{(1 - e^t)\,\theta(e^{2t})} = \frac{2e^{2t}\,\theta'(e^{2t})}{\theta(e^{2t})} - \frac{e^t}{1 - e^t} = 2\phi(2t) + \frac{e^t}{e^t - 1} \ .$$

c. Pour $k = 0$, la formule à établir est celle de b. avec $S_0(z) = \dfrac{z}{z-1}$. Supposons que, pour l'entier naturel k, on ait établi

$$\phi^{(k)}(t) = 2^{k+1}\phi^{(k)}(2t) + S_k(e^t) \ .$$

En dérivant, on obtient

$$\phi^{(k+1)}(t) = 2^{k+2}\phi^{(k+1)}(2t) + e^t\, S_k'(e^t) = 2^{k+2}\phi^{(k+1)}(2t) + S_{k+1}(e^t) \ ,$$

où S_{k+1} est la fraction rationnelle définie par $S_{k+1}(z) = z\, S_k'(z)$. Par récurrence, la formule demandée est bien établie pour tout entier naturel.

PARTIE III Quelques résultats sur les fractions rationnelles et les polynômes

III.A Fractions rationnelles à une indéterminée

III.A.1. (a) Soit $\dfrac{P}{Q} = \dfrac{A}{B} \neq 0$. Ceci veut dire que $PB = QA$, donc $\deg(P) + \deg(B) = \deg(Q) + \deg(A)$, d'où $\deg(P) - \deg(Q) = \deg(A) - \deg(B)$. Le degré d'une fraction rationnelle ne dépend pas du choix de son représentant.

Soient $R = A/B$ et $S = C/D$. Il suffit de considérer le cas où R et S sont tous les deux non nuls. Alors

$$\begin{aligned}\deg(R+S) &= \deg(AD+BC) - \deg(BD) \leq \max(\deg(AD), \deg(BC)) - \deg(BD)\\ &\leq \max(\deg(AD) - \deg(BD), \deg(BC) - \deg(BD)) = \max(\deg(R), \deg(S)) \ .\end{aligned}$$

(b) On vérifie que $\deg(R) + \deg(S) \leq \max(\deg(R), \deg(S))$ et que $\deg(\lambda R) = \deg(R)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Donc $\mathbb{C}_0(z)$ contient 0, est stable par addition et par multiplication par un scalaire : c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}(z)$. Puisque V et W sont engendrés par des éléments de $\mathbb{C}_0(z)$, ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}_0(z)$.

Il faut bien se garder de croire que V est l'ensemble des fractions rationnelles de degré -1 et W celui des fractions rationnelles de degré < -1. Par exemple, $\dfrac{1}{z(z-1)} = \dfrac{1}{z-1} - \dfrac{1}{z}$ est de degré -2, mais appartient à V.

(c) La décomposition en éléments simples nous dit que toute fraction rationnelle $R \in \mathbb{C}(z)$ se décompose **de manière unique** en

$$R = E + \sum_{\gamma \in \mathbb{C}, n \geq 1} \frac{a_{\gamma,n}}{(z-\gamma)^n} = E + \sum_{\gamma \in \mathbb{C}} \frac{a_{\gamma,1}}{z-\gamma} + \sum_{\gamma \in \mathbb{C}, n \geq 2} \frac{a_{\gamma,n}}{(z-\gamma)^n} \ ,$$

où E est un polynôme et les $a_{\gamma,n}$ des nombres complexes tous nuls sauf un nombre fini. Comme E est le quotient de la division euclidienne du numérateur de R par son dénominateur, si $R \in \mathbb{C}_0(z)$ alors $E \in \mathbb{C}$. Autrement dit, la famille formée de la constante 1 et des $\dfrac{1}{(z-\gamma)^n}$ pour $\gamma \in \mathbb{C}$ et $n \geq 1$ forme une base de $\mathbb{C}_0(z)$. Ceci montre $\mathbb{C}_0(z) = \mathbb{C} \oplus V \oplus W$ (par partition de la base).

Il faut bien prendre garde au fait que $\mathbb{C} \cap V = \mathbb{C} \cap W = V \cap W = \{0\}$ ne montre pas que la somme $\mathbb{C} + V + W$ est directe ! On peut penser au cas de trois droites vectorielles distinctes dans un plan vectoriel, dont les intersections deux à deux sont réduites à $\{0\}$; pourtant, le plan n'est pas la somme directe des trois droites.

III.A.2. La dérivée d'une constante est nulle et, pour tout entier $n \geq 1$, $\left(\dfrac{1}{(z-\gamma)^n}\right)' = \dfrac{-n}{(z-\gamma)^{n+1}} \in W$. Donc l'image de $\mathbb{C}_0(z)$ par la dérivation est contenue dans W, et est bien égale à W puisque la formule précédente montre que, pour $n \geq 2$, $\dfrac{1}{(z-\gamma)^n}$ est la dérivée d'un élément de $\mathbb{C}_0(z)$.

III.A.3. Puisque μ est linéaire, il suffit pour vérifier la stabilité de s'intéresser aux générateurs.

Si $R(z) = \dfrac{1}{z^n}$, alors $\mu(R)(z) = \dfrac{1}{z^{2n-1}}$ et $\mu(R)$ appartient à V si $n = 1$ et à W si $n \geq 2$.

Soit $\gamma \in \mathbb{C}$ non nul, et α une racine carrée de γ.

Si $R = \dfrac{1}{z-\gamma}$, calculons

$$\mu(R)(z) = \frac{z}{z^2-\gamma} = \frac{1}{2(z-\alpha)} + \frac{1}{2(z+\alpha)} \ .$$

On a $\mu(R) \in V$.

Si $R = \dfrac{1}{(z-\gamma)^n}$ avec $n \geq 2$, alors $\mu(R)(z) = \dfrac{z}{(z^2-\gamma)^n}$ est la dérivée de $\dfrac{1}{2(1-n)(z^2-\gamma)^{n-1}} \in \mathbb{C}_0(z)$, donc $\mu(R) \in W$ d'après la question 2. On peut aussi raisonner sur la décomposition en éléments simples

$$\mu(R)(z) = \frac{z}{(z^2-\gamma)^n} = \frac{a}{z-\alpha} + \frac{b}{z+\alpha} + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{c_k}{(z-\alpha)^k} + \frac{d_n}{(z+\alpha)^k} \right) \ ,$$

où a, b, c_k, d_k sont des nombres complexes. Puisque $\mu(R)$ est une fonction impaire de z, on a $a = b$. En multipliant par z et en faisant tendre $|z|$ vers l'infini, on trouve comme limite à gauche 0 et à droite $a+b$. Donc $a = b = 0$, et $\mu(R)$ appartient à W.

Au total on a montré que V et W sont stables par μ.

III.A.4. Soit $R(z) = \dfrac{1}{(z^2-\alpha^2)^n} = \dfrac{1}{(z-\alpha)^n(z+\alpha)^n}$. Alors $r(\alpha, n)$ s'obtient en faisant $z = \alpha$ dans $(z-\alpha)^n R(z)$, ce qui donne $r(\alpha, n) = \dfrac{1}{2^n\alpha^n}$.

III.B Polynômes à $(n+1)$ indéterminées

III.B.1. **Ordre sur $\mathbb{N}^{n+1}$.**

Si $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{n+1}) \in \mathbb{N}^{n+2}$, on notera $\alpha' = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$.

(a) Montrons par récurrence sur n que $\mathcal{R}_n$ est une relation d'ordre pour tout $n \in \mathbb{N}$. C'est vrai pour $n = 0$. Supposons que c'est vrai pour n et montrons-le pour $n+1$.
- $\mathcal{R}_{n+1}$ est réflexive. Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$ on a $\alpha_{n+1} = \alpha_{n+1}$ et $\alpha'\mathcal{R}_n\alpha'$ par hypothèse de récurrence.
- $\mathcal{R}_{n+1}$ est antisymétrique. Si $\alpha\mathcal{R}_{n+1}\beta$, alors forcément $\alpha_{n+1} = \beta_{n+1}$ et $\alpha'\mathcal{R}_n\beta'$ et $\beta'\mathcal{R}_n\alpha'$. Donc, par hypothèse de récurrence, $\alpha' = \beta'$ et $\alpha = \beta$.
- $\mathcal{R}_{n+1}$ est transitive. Supposons $\alpha\mathcal{R}_{n+1}\beta\mathcal{R}_{n+1}\gamma$. Si $\alpha_{n+1} < \beta_{n+1}$ ou $\beta_{n+1} < \gamma_{n+1}$, alors $\alpha_{n+1} < \gamma_{n+1}$ et $\alpha\mathcal{R}_{n+1}\gamma$. Reste le cas $\alpha_{n+1} = \beta_{n+1} = \gamma_{n+1}$ et $\alpha'\mathcal{R}_{n+1}\beta'\mathcal{R}_{n+1}\gamma'$. Alors par hypothèse de récurrence $\alpha'\mathcal{R}_n\gamma'$ et donc $\alpha\mathcal{R}_{n+1}\gamma$.

(b) Montrons par récurrence sur n que toute partie non vide de $\mathbb{N}^{n+1}$ admet un plus petit élément pour $\mathcal{R}_n$. C'est vrai pour $n = 0$. Supposons que c'est vrai pour n. Soit E une partie non vide de $\mathbb{N}^{n+2}$. Soit α_{n+1} le minimum des β_{n+1} pour $\beta \in E$. Posons $E' = \{\beta' \in \mathbb{N}^{n+1} \mid (\beta', \alpha_{n+1}) \in E\}$. Puisque E' est une partie non vide de $\mathbb{N}^{n+1}$, l'hypothèse de récurrence entraîne qu'il existe un plus petit élément α' de E' pour $\mathcal{R}_n$. Alors $\alpha = (\alpha', \alpha_{n+1})$ est le plus petit élément de E pour $\mathcal{R}_{n+1}$.

La propriété est bien établie par récurrence.

(c) Soient α et β des éléments de $\mathbb{N}^{n+1}$. Puisque $\{\alpha, \beta\}$ admet un plus petit élément pour $\mathcal{R}_n$ d'après b), on a $\alpha\mathcal{R}_n\beta$ ou $\beta\mathcal{R}_n\alpha$. Ceci montre que $\mathcal{R}_n$ est un ordre total.

(d) Un ensemble non vide totalement ordonné fini admet un plus grand élément. Donc, d'après c), tout sous-ensemble non vide fini E de $\mathbb{N}^{n+1}$ admet un plus grand élément pour $\mathcal{R}_n$, qu'on notera $\max E$.

III.B.2. **Multidegré d'un polynôme de $K[X_0, X_1, \dots, X_n]$.**

(a) On suppose que $P = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{n+1}} p_\alpha X^\alpha$ et $Q = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{n+1}} q_\alpha X^\alpha$ ont même multidegré $\delta = d(P) = d(Q)$. Par conséquent, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$, $p_\alpha \neq 0$ entraîne $\alpha\mathcal{R}_n\delta$ et $q_\alpha \neq 0$ entraîne $\alpha\mathcal{R}_n\delta$. Soit $E = \{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1} \mid p_\delta q_\alpha - q_\delta p_\alpha \neq 0\}$. Alors E est fini, $\delta \notin E$ et $\alpha\mathcal{R}_n\delta$ pour tout $\alpha \in E$ d'après ce qui précède. Donc ou bien E est vide et alors $p_\delta Q - q_\delta P = 0$, ou bien E est non vide et alors $\max E = d(p_\delta Q - q_\delta P)$ vérifie $\max E \neq \delta$ et $\max E \ \mathcal{R}_n\ \delta$.

(b) Si $J \neq \{0\}$, l'ensemble des multidegrés des éléments non nuls de J est non vide et admet un plus petit élément δ. Soit $M \in J$ tel que $d(M) = \delta$. Soit $P \in J \setminus \{0\}$ tel que $d(P) = \delta$. Alors, par définition de δ, $d(P) = \delta$. Soit m_δ (resp. p_δ) le coefficient dominant de M (resp. P), et posons $Q = p_\delta M - m_\delta P$; on a $Q \in J$. D'après a), si $Q \neq 0$ alors $d(Q)\mathcal{R}_n\delta$ et $d(Q) \neq \delta$, ce qui est impossible vu la définition de δ. Donc $Q = 0$, et $P = \dfrac{p_\delta}{m_\delta} M$.

III.B.3. Pour $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$, on pose $|\alpha| = \alpha_0 + \cdots + \alpha_n$. On note

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial X^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial X_0^{\alpha_0} \cdots \partial X_n^{\alpha_n}}$$

Le degré total d'un polynôme $P = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{n+1}} p_\alpha X^\alpha$ non nul est $\deg P = \max\{|\alpha| \mid p_\alpha \neq 0\}$. Pour tout monôme X^β on a $\deg \dfrac{\partial^{|\alpha|} X^\beta}{\partial X^\alpha} = |\beta| - |\alpha|$ si $\alpha_i \leq \beta_i$ pour tout i entre 0 et n, et $\dfrac{\partial^{|\alpha|} X^\beta}{\partial X^\alpha} = 0$ sinon. On en déduit que, pour tout polynôme P non nul, $\dfrac{\partial^{|\alpha|} P}{\partial X^\alpha} = 0$ ou $\deg \dfrac{\partial^{|\alpha|} P}{\partial X^\alpha} \leq \deg P - |\alpha|$.

Soit $P = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{n+1}} p_\alpha X^\alpha$ un polynôme non constant. Choisissons $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$ tel que $p_\beta \neq 0$ et $|\beta| = \deg P$ et ℓ entre 0 et n tel que $\beta_\ell > 0$. Soit $i = (i_0, \dots, i_n)$ défini par $i_k = \beta_k$ pour $k \neq \ell$ et $i_\ell = \beta_\ell - 1$. Alors $|i| = \deg P - 1$, donc $\dfrac{\partial^{|i|} P}{\partial X^i} = 0$ ou $\deg \dfrac{\partial^{|i|} P}{\partial X^i} \leq 1$. Mais comme $\dfrac{\partial^{|i|} X^\beta}{\partial X^i} = \beta_0! \cdots \beta_n!\, X_\ell$ et que $p_\beta \neq 0$, on a bien $\deg \dfrac{\partial^{|i|} P}{\partial X^i} = 1$, ce qui montre que $\dfrac{\partial^{|i|} P}{\partial X^i}$ est un polynôme affine non constant.

Voici un autre raisonnement utilisant le multidegré $d(P) = (j_0, \dots, j_n)$. On raisonne par récurrence sur n. Si $n = 0$, on dérive jusqu'à trouver un polynôme du premier degré en X_0. Supposons $n > 0$ et le résultat établi pour $n - 1$. Si $(j_0, \dots, j_{n-1}) \neq (0, \dots, 0)$, alors $\dfrac{\partial^{j_n} P}{\partial X_n^{j_n}}$ est un polynôme non constant en $X_0, \dots, X_{n-1}$ et on utilise l'hypothèse de récurrence. Sinon, forcément $j_n \neq 0$ et $\dfrac{\partial^{j_n - 1} P}{\partial X_n^{j_n - 1}} = cX_n + Q(X_0, \dots, X_{n-1})$, où c est une constante. Si Q est de degré total ≤ 1, c'est fini. Sinon, on peut trouver i, $0 \leq i \leq n-1$, tel que $\dfrac{\partial^{j_n} P}{\partial X_n^{j_n - 1}\, \partial X_i} = \dfrac{\partial Q}{\partial X_i}$ soit un polynôme non constant en $X_0, \dots, X_{n-1}$ et on peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence.

PARTIE IV On se propose de montrer que la fonction θ définie dans la question II.1.c ne vérifie pas d'équation différentielle algébrique sur $\mathbb{C}(z)$.

IV.1 (a) Montrons par récurrence sur k qu'il existe un polynôme $Q_k \in \mathbb{C}[Z_0, \dots, Z_{k-1}]$, de la forme $Q_k = Z_{k-1} + U_k$ où Z_{k-1} ne figure pas dans U_k (et donc Q_k de multidegré $(0, \dots, 0, 1)$), tel que $\theta^{(k)} = \theta\, Q_k(g, g', \dots, g^{(k-1)})$.

Puisque $\theta' = \theta g$, en posant $Q_1 = Z_0$, on trouve bien $\theta' = \theta Q_1(g)$; et Q_1 est de la forme indiquée.

Supposons connu $Q_k = Z_{k-1} + U_k$ vérifiant la propriété ci-dessus. Alors

$$\begin{aligned}
\theta^{(k+1)} &= \theta' Q_k(g, \dots, g^{(k-1)}) + \theta \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\partial Q_k}{\partial Z_i}(g, \dots, g^{(k-1)})\, g^{(i+1)} \\
&= \theta \left(Q_1(g) Q_k(g, \dots, g^{(k-1)}) + \sum_{i=0}^{k-2} \frac{\partial U_k}{\partial Z_i}(g, \dots, g^{(k-2)}) g^{(i+1)} + g^{(k)}\right) \\
&= \theta\, Q_{k+1}(g, \dots, g^{(k-1)}, g^{(k)}) \ ,
\end{aligned}$$

où $Q_{k+1} = Z_k + Q_1 Q_k + \sum_{i=0}^{k-2} \dfrac{\partial U_k}{\partial Z_i} Z_{i+1}$ est bien de la forme voulue.

(b) Soit $M = T_0^{\alpha_0} \cdots T_n^{\alpha_n}$ un monôme de degré total d. Alors $M(1, Q_1, \dots, Q_n) = Q_1^{\alpha_1} \cdots Q_n^{\alpha_n}$ est, d'après ce qu'on sait des multidegrés des Q_k, de multidegré $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Et puisque $\alpha_0 = d - \sum_{i=1}^n \alpha_i$, deux monômes différents de même degré total d donnent, après substitution, des polynômes de multidegrés différents. On en déduit que si $H \in \mathbb{C}(z)[T_0, \dots, T_n]$ est un polynôme homogène non nul, de degré total d et de multidegré $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, alors $H(1, Q_1, \dots, Q_n) \in \mathbb{C}(z)[Z_0, \dots, Z_{n-1}]$ est non nul de multidegré $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

IV.2 Soit

$$P(\theta, \theta', \dots, \theta^{(n)}) = 0 \tag{7}$$

(où $P \in \mathbb{C}(z)[T_0, \dots, T_n]$ est un polynôme de degré total $d > 0$) une équation différentielle algébrique vérifiée par θ. On peut supposer que n est le plus petit entier pour lequel une telle équation existe, et donc $\dfrac{\partial P}{\partial T_n} \neq 0$, et aussi que le degré de P est minimum, et donc $\dfrac{\partial P}{\partial T_n}(\theta, \theta', \dots, \theta^{(n)}) \neq 0$. En dérivant l'équation (7) on obtient

$$S(\theta, \theta', \dots, \theta^{(n)}) + \theta' \frac{\partial P}{\partial T_0}(\theta, \dots, \theta^{(n)}) + \cdots + \theta^{(n+1)} \frac{\partial P}{\partial T_n}(\theta, \dots, \theta^{(n)}) = 0 \ , \tag{8}$$

où S est le polynôme dont les coefficients sont les dérivées de ceux de P. L'égalité (8) et le fait que $\dfrac{\partial P}{\partial T_n}(\theta, \theta', \dots, \theta^{(n)}) \neq 0$ montrent que $\theta^{(n+1)}$ appartient au corps $K = \mathbb{C}(z, \theta, \dots, \theta^{(n)})$. D'après

les égalités $\theta' = g\theta$ et $\theta^{(k)} = (g^{(k-1)} + U_k(g,\dots,g^{(k-2)}))\,\theta$ pour $k \geq 2$ établies en 1.a, on a $K = \mathbb{C}(z,\theta,g,g',\dots,g^{(n-1)})$. Puisque $\theta^{(n+1)}$ appartient à K, $g^{(n)} = \theta^{(n+1)} - U_{n+1}(g,\dots,g^{(n-1)})$ appartient aussi à K.
En utilisant 1.a, on a

$$P(\theta,\theta\,Q_1(g),\dots,\theta\,Q_n(g,\dots,g^{(n-1)})) = 0\ .$$

Décomposons P en composantes homogènes : $P = \sum_{k=0}^{d} P_k$. On obtient alors

$$\sum_{k=0}^{d} P_k(1,Q_1(g),\dots,Q_n(g,\dots,g^{(n-1)}))\,\theta^k = 0\ .$$

On sait d'après 1.b que le polynôme $P_d(1,Q_1,\dots,Q_n)$ est non nul. Donc si

$$P_d(1,Q_1(g),\dots,Q_n(g,\dots,g^{(n-1)})) = 0\ ,$$

on a déjà trouvé une équation différentielle algébrique sur $\mathbb{C}(z)$ vérifiée par g.
Sinon, on arrive à la conclusion que θ est algébrique sur le corps $\mathbb{C}(z,g,g',\dots,g^{(n-1)})$ et donc que K est une extension algébrique de $\mathbb{C}(z,g,g',\dots,g^{(n-1)})$. Donc $g^{(n)}$, qui appartient à K, est algébrique sur $\mathbb{C}(z,g,g',\dots,g^{(n-1)})$ et le polynôme minimal de $g^{(n)}$ sur ce corps fournit une équation différentielle algébrique sur $\mathbb{C}(z)$ satisfaite par g.

IV.3 On a, pour tout $t \in \Pi$, $g(e^t) = e^{-t}\,\phi(t)$ et on vérifie par récurrence sur k qu'il existe pour tout $k \geq 0$ des entiers $\lambda_{k,1},\dots,\lambda_{k,k}$ tels que $g^{(k)}(e^t) = e^{-kt}(\phi^{(k)}(t) + \sum_{i=1}^{k}\lambda_{k,i}\phi^{(k-i)}(t))$. En effet, en dérivant l'égalité précédente et en divisant par e^t, on obtient

$$g^{(k+1)}(e^t) = e^{-(k+1)t}\left(\phi^{(k+1)}(t) + \sum_{i=1}^{k}\lambda_{k,i}\phi^{(k+1-i)}(t) - k\phi^{(k)}(t) - k\sum_{i=1}^{k}\lambda_{k,i}\phi^{(k-i)}(t)\right)\ .$$

Soit P non nul de $\mathbb{C}(z)[Z_0,\dots,Z_n]$ tel que $P(g,\dots,g^{(n)}) = 0$ (l'existence d'un tel P est donné par la question 2). Faisons le changement de variables $z = \exp(t)$, $Z_0 = \exp(t)^{-1}T_0$, $Z_k = \exp(t)^{-k}(T_k + \sum_{i=1}^{k}\lambda_{k,i}T_{k-i})$ dans P ; on obtient un polynôme $Q \in L[T_0,\dots,T_n]$ de même multidegré que P, en particulier $Q \neq 0$. D'après ce qui précède, on a $Q(\phi,\phi'\dots,\phi^{(n)}) = 0$, ce qui montre que ϕ vérifie une équation différentielle algébrique sur L.

IV.4 Soit $M \neq 0$ de multidegré minimal dans l'idéal des $Q \in L[X_0,\dots,X_n]$ tels que $Q(\phi,\phi'\dots,\phi^{(n)}) = 0$ (où n est tel que cet idéal est non nul, d'après 3). Alors

$$0 = M^*(\phi^*,\dots,\phi^{(n)*}) = M^*(\frac{1}{2}(\phi - R_0),\dots,\frac{1}{2^{n+1}}(\phi^{(n)} - R_n)) \tag{9}$$

d'après II.3. Donc $M^*(\frac{1}{2}(\phi - R_0),\dots,\frac{1}{2^{n+1}}(\phi^{(n)} - R_n))$ est aussi dans l'idéal, et il a même multidegré que M. D'après III.B.2, il est égal à λM, où λ est un élément non nul de L.

IV.5 a. Par III.B.3 on peut dériver M pour trouver un polynôme affine non constant $U = \dfrac{\partial^{|i|}M}{\partial X^i}$. Il existe $c \in \mathbb{Q}$ non nul tel que

$$\frac{\partial^{|i|}}{\partial X^i}M^*(\frac{1}{2}(X_0 - R_0),\dots,\frac{1}{2^{n+1}}(X_n - R_n)) = c\,U^*(\frac{1}{2}(X_0 - R_0),\dots,\frac{1}{2^{n+1}}(X_n - R_n))\ ,$$

d'où, en posant $\mu = \lambda/c$ élément non nul de L,

$$U^*(\frac{1}{2}(X_0 - R_0),\dots,\frac{1}{2^{n+1}}(X_n - R_n)) = \mu\,U \tag{10}$$

b. Posons $U = \sum_{i=0}^{n} p_i X_i + q$, avec $p_i, q \in L$. L'égalité (10) donne $\dfrac{1}{2^{i+1}}\,p_i^* = \mu\,p_i$ pour $i = 0,\dots,n$. On a $p_i = A_i(e^t)$ et $\mu = C(e^t)$ avec A_i et C dans $\mathbb{C}(z)$. Il vient $\dfrac{1}{2^{i+1}}\,A_i(z^2) = C(z)\,A_i(z)$. Si $A_i \neq 0$, alors il existe $a_i \in \mathbb{C}$ non nul et $k_i \in \mathbb{Z}$ tels que $A_i(z) \sim a_i z^{k_i}$ quand $|z| \to \infty$, d'où $C(z) \sim \dfrac{z^{k_i}}{2^{i+1}}$. Donc il y a exactement un A_i non nul, soit A_m, et $\mu = \dfrac{p_m^*}{2^{m+1}p_m}$. L'identification des termes constants dans (10) donne

$$-p_m^*\frac{R_m}{2^{m+1}} + q^* = \frac{p_m^*}{2^{m+1}p_m}\,q\ ,$$

d'où $R_m = 2^{m+1}u^* - u$ avec $u = \dfrac{q}{p_m}$.

c. On a donc pour tout $t \in \Pi$, $S_m(e^t) = 2^{m+1}\nu(e^{2t}) - \nu(e^t)$ avec $\nu(z) \in \mathbb{C}(z)$, d'où $S_m(z) = 2^{m+1}\nu(z^2) - \nu(z)$.

IV.6 De $S_0(z) = 1 + \dfrac{1}{z-1}$ et $S_{k+1}(z) = zS'(z)$ il résulte que 1 est le seul pôle de $S_m(z)$. On remarque que si a est pôle de $\nu(z^2)$ alors a^2 est pôle de $\nu(z)$ et que si a^2 est pôle de $\nu(z)$ alors a et $-a$ sont pôles de $\nu(z^2)$. Nécessairement 1 est pôle de $\nu(z)$. Alors -1 est pôle de $\nu(z^2)$, donc il doit l'être aussi de $\nu(z)$ (sinon, -1 serait pôle de S_m). Alors i est pôle de $\nu(z^2)$, donc de $\nu(z)$ et par récurrence on a $e^{i\pi/2^n}$ pôle de $\nu(z)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui fait trop de pôles pour une fraction rationnelle.

PARTIE V Généralisation

V.1 a. Soit $z \in \Delta$. On pose $\theta_n(z) = \prod_{k=0}^{n} R(z^{2^k})$. Quand k tend vers l'infini, z^{2^k} tend vers 0 et $R(z^{2^k})$ tend vers 1. Donc $\ln(R(z^{2^k}))$ est équivalent à $z^{2^k} R'(0)$ (où ln est la détermination principale du logarithme). La série de terme général z^{2^k} converge absolument et uniformément sur tout compact de Δ, donc il en est de même pour la série de terme général $\ln(R(z^{2^k}))$. De manière précise, pour tout ρ avec $0 < \rho < 1$, il existe un entier naturel N tel que pour $|z| \leq \rho$ et $k \geq N$ on a $|1 - R(z^{2^k})| < 1$, et $\sum_{k=N}^{\infty} \ln(R(z^{2^k})$ converge absolument et uniformément sur le disque fermé de rayon ρ. Alors $\theta_n(z)$ converge uniforméméent sur tout compact de Δ vers une fonction θ holomorphe sur Δ. Comme $\theta_n(z^2)\, R(z) = \theta_{n+1}(z)$, on a par passage à la limite $\theta(z^2)\, R(z) = \theta(z)$, et $\theta(0) = 1$ est clair.

Puisque $R(0) = 1$, il existe r, $0 < r < 1$, tel que R n'ait aucun zéro dans $\Delta' = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$. On montre alors comme en II.2.b que θ ne s'annule pas sur Δ'. Soit ϕ une autre fonction holomorphe sur Δ telle que $\phi(0) = 1$ et $\phi(z^2)\, R(z) = \phi(z)$ pour tout $z \in \Delta$. On montre comme en II.2.c que $\phi = \theta$ sur Δ' et donc aussi sur Δ par prolongement analytique. Ainsi θ est la seule fonction holomorphe sur Δ vérifiant $\theta(0) = 1$ et $\theta(z^2)R(z) = \theta(z)$ pour tout $z \in \Delta$.

b. En remplaçant z par e^t (où $t \in \Pi$) il vient $\theta(e^t) = \theta(e^{2t})\, R(e^t)$. En dérivant et en divisant par $\theta(e^t)$ (de sorte qu'on est maintenant dans le corps de fonctions méromorphes $M(\Pi)$) il vient

$$e^t\, \frac{\theta'(e^t)}{\theta(e^t)} = 2e^{2t}\, \frac{\theta'(e^{2t})}{\theta(e^{2t})} + e^t\, \frac{R'(e^t)}{R(e^t)}\ ,$$

c.-à-d. $f(t) = 2f(2t) + S_0(e^t)$ avec $S_0(z) = z\, \dfrac{R'(z)}{R(z)} \in \mathbb{C}(z)$. En définissant par récurrence $S_{k+1}(z) = z\, S_k'(z) \in \mathbb{C}(z)$, il vient en dérivant $f^{(k)}(t) = 2^{k+1}\, f^{(k)}(2t) + S_k(e^t)$.

V.2 On remarque par récurrence sur k que $S_k(z) \in \mathbb{C}_0(z)$, et donc d'après III.A.2 on a $S_k'(z) \in W$ pour tout entier naturel k. De $S_m(z) = 2^{m+1}\nu(z^2) - \nu(z)$ on déduit, si $m > 0$, $S_{m-1}'(z) = 2^{m+1} z \dfrac{\nu(z^2)}{z^2} - \dfrac{\nu(z)}{z}$. Si $\nu(z) \sim az^d$ quand $|z|$ tend vers l'infini, avec $d > 0$, alors $S_m(z) \sim 2^{m+1} a\, z^{2d}$, ce qui est impossible car $S_m(z) \in \mathbb{C}_0(z)$. Donc $\nu(z) \in \mathbb{C}_0(z)$, et $\rho(z) = \dfrac{\nu(z)}{z} \in V \oplus W$. On a donc une décomposition unique $\rho(z) = v(z) + w(z)$ avec $v \in V$ et $w \in W$. D'après III.A.3 on a $z\, \dfrac{\nu(z^2)}{z^2} = \mu(\rho)(z) = \mu(v)(z) + \mu(w)(z)$ avec $\mu(v) \in V$ et $\mu(w) \in W$. Donc

$$W \ni S_{m-1}'(z) = \underbrace{(2^{m+1}\mu(v) - v)(z)}_{\in V} + \underbrace{(2^{m+1}\mu(w) - w)(z)}_{\in W} \tag{11}$$

et $2^{m+1}\mu(v) - v = 0$. Puisque $w \in W$, il existe $u \in V + W$ tel que $w = u'$, d'après III.A.2, et $S_{m-1}'(z) = (2^{m+1}\mu(u') - u')(z) = 2^{m+1} z\, u'(z^2) - u'(z)$. On en tire $S_{m-1}(z) = 2^m u(z^2) - u(z) + c$ avec $c \in \mathbb{C}$, ce qui se réécrit en posant $t(z) = u(z) + \dfrac{c}{2^m - 1} \in \mathbb{C}_0(z)$

$$S_{m-1}(z) = 2^m t(z^2) - t(z)\ .$$

En remontant ainsi, on aboutit à

$$z\, \frac{R'(z)}{R(z)} = S_0(z) = 2\, G(z^2) - G(z) \tag{12}$$

avec $G \in \mathbb{C}_0(z)$. Si 0 était pôle d'ordre $d > 0$ de G, il serait pôle d'ordre $2d$ de $G(z^2)$ donc aussi de $S_0(z)$, ce qui n'est pas. Donc 0 n'est pas pôle de G. On a $G(0) = 0$.

V.3 a. On remarque que $\dfrac{R'(z)}{R(z)}$ (la dérivée logarithmique de R) n'a que des pôles simples aux zéros et aux pôles de R. Précisément on a

$$\frac{R'(z)}{R(z)} = \sum_{\gamma\in\mathbb{C}^*} \frac{r(\gamma)}{z-\gamma} , \tag{13}$$

où $r(\gamma) \in \mathbb{Z}$ est l'ordre du zéro γ si γ est un zéro de R, l'opposé de l'ordre du pôle γ si γ est un pôle de R et 0 dans les autres cas.

Si a^2 (avec $a \neq 0$) est pôle d'ordre $n > 1$ de $G(z)$, alors $\pm a$ sont pôles d'ordre n de $G(z^2)$ et donc aussi pôles d'ordre n de $G(z)$ (sinon, ils seraient pôles d'ordre $\geq n$ de $z\,\dfrac{R'(z)}{R(z)}$). En continuant, on aurait ainsi une infinité de pôles pour G, ce qui est beaucoup trop pour une fraction rationnelle. Ainsi G n'a que des pôles simples, et sa décomposition en éléments simples est

$$G(z) = \sum_{\gamma\in\mathbb{C}^*} \frac{g(\gamma)}{z-\gamma} , \tag{14}$$

sans partie entière puisque $G \in \mathbb{C}_0(z)$ et $G(0) = 0$.

b. De (13) on tire

$$z\,\frac{R'(z)}{R(z)} = \sum_{\gamma\in\mathbb{C}^*} r(\gamma) + \sum_{\gamma\in\mathbb{C}^*} \gamma\,\frac{r(\gamma)}{z-\gamma} . \tag{15}$$

De (14) et de $\dfrac{1}{z^2-\gamma^2} = \dfrac{1}{2\gamma}\left(\dfrac{1}{z-\gamma} - \dfrac{1}{z+\gamma}\right)$ on tire

$$2G(z^2) - G(z) = \sum_{\gamma\in\mathbb{C}^*} \frac{g(\gamma^2)/\gamma - g(\gamma)}{z-\gamma} \tag{16}$$

En rapprochant (15) et (16), il vient $\dfrac{g(\gamma^2)}{\gamma^2} - \dfrac{g(\gamma)}{\gamma} = r(\gamma) \in \mathbb{Z}$ pour tout $\gamma \in \mathbb{C}^*$. Comme il n'y a qu'un nombre fini de γ tels que $g(\gamma) \neq 0$, on en déduit que $g(\gamma)/\gamma \in \mathbb{Z}$ pour tout $\gamma \in \mathbb{C}^*$; en effet, on aurait sinon un γ tel que $g(\gamma^2)/\gamma^2 \in \mathbb{Z}$ et $g(\gamma)/\gamma \notin \mathbb{Z}$, ce qui est impossible puisque leur différence est entière.

Posons maintenant $S(z) = \prod_{\gamma\in\mathbb{C}^*, g(\gamma)\neq 0} (z-\gamma)^{-g(\gamma)/\gamma}$. Alors

$$z\,\frac{S'(z)}{S(z)} = z \sum_{\gamma\in\mathbb{C}^*} \frac{-g(\gamma)/\gamma}{z-\gamma} = -\sum_{\gamma\in\mathbb{C}^*} \frac{g(\gamma)}{\gamma} - \sum_{\gamma\in\mathbb{C}^*} \frac{g(\gamma)}{z-\gamma} = c - G(z) , \tag{17}$$

où l'on a posé $c = -\sum_{\gamma\in\mathbb{C}^*} \dfrac{g(\gamma)}{\gamma}$. Mais puisque $G(0) = 0$, on trouve $c = 0$. En reportant dans (12) et en divisant pas z, on obtient l'égalité dans $\mathbb{C}(z)$

$$\frac{R'(z)}{R(z)} = \frac{S'(z)}{S(z)} - \frac{2z\,S'(z^2)}{S(z^2)}$$

d'où, en reconnaissant les dérivées logarithmiques, $R(z) = \lambda \dfrac{S(z)}{S(z^2)}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$. En faisant $z = 0$ on obtient $\lambda = 1$.

On a donc trouvé une fraction rationnelle $S(z)$ qui vérifie $S(z) = R(z)\,S(z^2)$ dans $\mathbb{C}(z)$ et telle que 0 n'est ni pôle ni zéro de S. Le raisonnement de 1 montre que $S(z) = S(0)\,\theta(z)$ au voisinage de l'origine, et donc par prolongement analytique $\theta(z) \in \mathbb{C}(z)$.