Université de Rennes 1 - UFR Mathématiques
Préparation à l'agrégation de mathématiques

Problème de mathématiques générales 2002
Corrigé (Laurent Moret-Bailly, mars 2003)

[**Commentaires :** Les copies dont il est question dans les commentaires ont été corrigées par l'auteur fin 2002, dans le cadre de la préparation au concours 2003 à l'université de Rennes 1. Le « corrigé officiel » est celui du rapport du jury 2002.]

I Formes sesquilinéaires symétriques

I 1) Pour x et y dans E, la sesquilinéarité et la symétrie donnent immédiatement

$$b(x+y,x+y) = b(x,x) + b(y,y) + 2\,\Re b(x,y)$$

d'où aussi

$$b(ix+y,ix+y) = b(ix,ix) + b(y,y) - 2\,\Im b(x,y).$$

Supposons alors que $b(z,z) = 0$ pour tout $z \in E$: alors les deux relations ci-dessus impliquent que $\Re b(x,y) = \Im b(x,y) = 0$ pour x et y quelconques dans E, donc que b est nulle. Ceci montre (la contraposée de) la première assertion.

Variante : si b n'est pas nulle, elle est évidemment surjective (comme application de $E\times E$ dans $\mathbb{C}$) et en particulier $\Re\, b : E\times E \to \mathbb{R}$ n'est pas nulle. Or il résulte de la définition que $\Re\, b$ est une forme $\mathbb{R}$-bilinéaire symétrique (sur l'espace vectoriel réel sous-jacent à E) ; comme elle n'est pas nulle, sa forme quadratique associée est non nulle, et il existe donc $x \in E$ tel que $\Re\, b(x,x) \neq 0$, et *a fortiori* $b(x,x) \neq 0$.

Pour la seconde assertion, soit $x \in E$ tel que $b(x,x) \neq 0$, et posons $\lambda = |b(x,x)|^{-1/2}$. Alors $y := \lambda x$ vérifie $|b(y,y)| = 1$, d'où $b(y,y) = \pm 1$ car $b(y,y) \in \mathbb{R}$ (conséquence de la symétrie).

[**Commentaires :** ne pas oublier de dire que $b(y,y)$ est réel !]

I 2) Récurrence sur $\dim E$.

[**Commentaires :** l'espace nul est parfaitement respectable. La récurrence peut et doit commencer à la dimension 0.

D'autre part quelques-uns ont invoqué Gram-Schmidt pour cette question. On rappelle que cette méthode ne marche que pour les formes définies positives.]

Supposons démontré que tout espace sesquilinéaire symétrique de dimension $< \dim E$ admet une base semi-orthonormée, et montrons que E en a une. (L'hypothèse de récurrence est trivialement vérifiée si E est nul).

Si b est nulle, alors toute base de E est semi-orthonormée. Sinon, d'après I 1), il existe $x \in E$ tel que $b(x,x) \neq 0$. Choisissons arbitrairement un tel x. L'argument de I 1) montre que $e_1 := x/|b(x,x)|^{1/2}$ vérifie $b(e_1,e_1) = \pm 1$. Considérons $F = (\mathbb{C}x)^\perp = (\mathbb{C}e_1)^\perp$. Alors $e_1 \notin F$ (puisque $b(e_1,e_1) \neq 0$), et F est un hyperplan de E puisque c'est le noyau de la forme $\mathbb{C}$-linéaire non nulle $z \mapsto b(z, e_1)$. Donc F est un supplémentaire de $\mathbb{C}e_1$ dans E. Par hypothèse de récurrence, il admet une base semi-orthonormée $(e_2, \ldots, e_n)$ (pour la restriction de b à F) : alors $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base semi-orthonormée de E puisque e_1 est orthogonal à $e_2, \ldots, e_n$ et que $b(e_1, e_1) \in \{-1, 1\}$, cqfd. (Ceci démontre aussi la partie b) de I 6) plus bas).

[**Commentaires :** avec les notations ci-dessus, le fait essentiel que F soit un supplémentaire de $\mathbb{C}e_1$ a été tantôt omis, tantôt affirmé sans justification, tantôt enfin démontré au bout de dix lignes de calculs, ce qui est certes un moindre mal mais coûte de précieuses minutes et risque d'éroder la bienveillance du correcteur.]

I 3) Posons $e_1 = (1/2, 1) \in \mathbb{C}^2$ et $e_2 = (1/2, -1)$. Un calcul immédiat montre que (e_1, e_2) est une base semi-orthonormée de (E, b), avec $b(e_1, e_1) = 1$ et $b(e_2, e_2) = -1$.

[**Commentaires :** dans une telle question, inutile d'aligner les calculs : on peut se permettre de parachuter le résultat.

La plupart (parmi les réponses correctes) ont préféré $e_1 = (1, 1)/\sqrt{2}$, $e_2 = (1, -1)/\sqrt{2}$.

On a vu dans quelques rares copies la fâcheuse formule $b((x, y), (x', y')) = xy' + yx'$, sans conjugaison.

On observera que l'auteur de l'énoncé emploie ici une notion (la matrice d'une forme dans une base) qui n'est définie que dans la partie II !]

I 4) Pour $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j \in E$ (avec $x_j \in \mathbb{C}$), on a $b(x, x) = \sum_{j=1}^n |x_j|^2 \, b(e_j, e_j)$. Cette relation implique notamment que b est positive sur $E_+ \oplus E_0$, négative sur $E_- \oplus E_0$, définie positive sur E_+ et définie négative sur E_-.

a) Si b est définie positive sur F elle est, d'après la remarque précédente, à la fois négative et définie positive sur $F \cap (E_- \oplus E_0)$, ce qui n'est possible que si $F \cap (E_- \oplus E_0)$ est nul. Même raisonnement pour l'autre assertion.

[**Commentaires :** vu dans quelques copies : « $F \cap E_- = \{0\}$ et $F \cap E_0 = \{0\}$ donc $F \cap (E_- \oplus E_0) = \{0\}$ ».]

b) Il est clair que le nombre en question est égal à $\dim E_+ - \dim E_-$. Il suffit donc de voir que $\dim E_+$ ne dépend pas du choix de $\mathcal{B}$ (on aura la même propriété pour $\dim E_-$ en remplaçant b par $-b$, donc aussi pour la différence $\dim E_+ - \dim E_-$).

Soit S_+ l'ensemble (indépendant de $\mathcal{B}$) des sous-espaces F de E tels que b soit définie positive sur F. D'après a), on a $\dim F \leq \dim E - \dim E_0 - \dim E_- = \dim E_+$ pour tout $F \in S_+$. Mais d'autre part on a vu que $E_+ \in S_+$. En résumé,

$$\dim E_+ = \max_{F \in S_+} \dim F$$

ce qui prouve l'invariance voulue.

[**Commentaires :** la plupart des copies, ainsi que le corrigé officiel, présentent le raisonnement sous la forme plus standard suivante : on prend une autre base semi-orthonormée $\mathcal{B}'$, d'où des sous-espaces E'_+, E'_- et E'_0 ; d'après la question précédente, on a $E'_+ \cap (E_- \oplus E_0) = \{0\}$, etc. Cependant un nombre étonnamment grand d'étudiants, arrivés à ce point, ont bravement conclu « donc $E'_+ \subset E_+$ » ce qui est une énormité.

Au bout du compte, peu de copies donnent une démonstration propre de ce résultat pourtant classique.]

I 5) Deux remarques préliminaires sur σ :
– si (E, b) est l'espace de la question I 3), alors $\sigma(E, b) = 0$ (résulte du calcul de I 3)) ;
– si $E = F \oplus G$, où G et F sont orthogonaux, alors $\sigma(E) = \sigma(F) + \sigma(G)$ (prendre une base de E « réunion » d'une base semi-orthonormée de F et d'une base semi-orthonormée de G).

Considérons maintenant l'espace (E, b) de la question. Pour i entier $\leq n/2$, posons $F_i = \mathbb{C}e_i \oplus \mathbb{C}e_{n+1-i}$. Alors :

– pour n pair, $E = F_1 \oplus \ldots \oplus F_{n/2}$;

– pour n impair, $E = F_1 \oplus \ldots \oplus F_{(n-1)/2} \oplus \mathbb{C}e_{(n+1)/2}$.

De plus dans les deux cas la somme est orthogonale. Chacun des F_i est isomorphe à l'espace de la question I 3), de sorte que $\sigma(F_i) = 0$. Dans le second cas, on a $b(e_{(n+1)/2}, e_{(n+1)/2}) = 1$ donc $\sigma(\mathbb{C}e_{(n+1)/2}) = 1$. Par additivité pour les sommes orthogonales, on en déduit

$$\sigma(E) = \begin{cases} 0 & (n \text{ pair}) \\ 1 & (n \text{ impair}). \end{cases}$$

[**Commentaires :** beaucoup ont fait comme si la base canonique était semi-orthonormée. C'est l'erreur la plus répandue de la partie I.

Dans la plupart des réponses correctes, on a utilisé la base semi-orthonormée formée des vecteurs $(e_i \pm e_{n+1-i})/\sqrt{2}$ $(1 \leq i \leq n/2)$ et, pour n impair, du vecteur $e_{(n+1)/2}$.]

I 6) a) Si $x \in E^\perp$, soit F un supplémentaire de $\mathbb{C}x$ dans E. D'après I 2), F admet une base semi-orthonormée $(e_2, \ldots, e_n)$ (pour la restriction de b à F) : alors $(x, e_2, \ldots, e_n)$ est une base semi-orthonormée de E puisque x est orthogonal à $e_2, \ldots, e_n$ et que $b(x, x) = 0$.

b) Déjà démontré dans I 2).

c) Si $b(x, x) = 0$ et $x \notin E^\perp$, il existe $y \in E$ tel que $b(y, x) \neq 0$; quitte à multiplier y par un nombre complexe convenable, on aura même $b(y, x) = b(x, y) = 1$. Cette condition n'est pas perdue si l'on remplace y par $y + \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, puisque $b(x, x) = 0$. Comme $b(y + \lambda x\,,\, y + \lambda x) = b(y, y) + 2\lambda$, on peut finalement (en prenant $\lambda = -b(y, y)/2$, qui est bien réel) trouver y vérifiant

$$b(y, x) = b(x, y) = 1 \text{ et } b(y, y) = 0.$$

Soit P le sous-espace engendré par x et y : il est de dimension 2 (y n'est pas colinéaire à x puisque $b(x, x) = 0$ et $b(x, y) \neq 0$). Posons

$$e_1 = \frac{x}{2} + y, \qquad e_2 = \frac{x}{2} - y.$$

Alors un calcul immédiat (le même qu'en I 3)) montre que (e_1, e_2) est une base semi-orthonormée de P (avec $b(e_1, e_1) = 1$ et $b(e_2, e_2) = -1$) vérifiant $e_1 + e_2 = x$. Il en résulte de plus que l'orthogonal de e_1 (resp. e_2) dans P est $\mathbb{C}e_2$ (resp. $\mathbb{C}e_1$) de sorte que $P \cap P^\perp = \{0\}$ dans E.

Soit $F = P^\perp$: alors F est l'intersection des deux hyperplans $e_1^\perp$ et $e_2^\perp$ donc est de dimension $\geq n-2$. Comme $P \cap F = \{0\}$ on en déduit que $\dim F = n-2$ et que F est un supplémentaire de P. D'après I 2), F admet une base semi-orthonormée $(e_3, \ldots, e_n)$, et il est immédiat que $(e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n)$ est une base semi-orthonormée de E ayant les propriétés voulues.

[**Commentaires :** la partie c) n'a presque jamais été traitée. D'autre part le corrigé officiel donne, aux notations près, la base $e_1' = \frac{x+y}{2}$, $e_2' = \frac{x-y}{2}$, qui n'est pas semi-orthonormée : on a $b(e_1', e_1') = -b(e_2', e_2') = 1/2$.]

I 7) Cas a) : il est clair que $G = E$ et que $\sigma(F) = 0$, d'où trivialement $\sigma(E) = \sigma(F) + \sigma(G)$.

Cas b) : comme on l'a vu dans la preuve de I 2), E est somme directe orthogonale $F \oplus G$, d'où encore $\sigma(E) = \sigma(F) + \sigma(G)$.

Cas c) : on a $\sigma(F) = 0$. D'autre part on a construit une base semi-orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de E avec $x = e_1 + e_2$ et de plus $b(e_1, e_1) = 1$, $b(e_2, e_2) = -1$. Donc

$$\sigma(E) = \sum_{i=3}^{n} b(e_i, e_i).$$

Par ailleurs G contient $x, e_3, \ldots, e_n$; comme ceux-ci sont indépendants et que $\dim G < n$ (car $x \notin E^\perp$) on voit que $(x, e_3, \ldots, e_n)$ est une base de G, évidemment semi-orthonormée puisque x est orthogonal à $e_3, \ldots, e_n$ et que $b(x, x) = 0$. On a donc

$$\begin{array}{rcll} \sigma(G) & = & b(x,x) + \sum_{i=3}^{n} b(e_i, e_i) & \\ & = & \sum_{i=3}^{n} b(e_i, e_i) & \text{(puisque } b(x,x) = 0) \\ & = & \sigma(E), & \text{cqfd.} \end{array}$$

[**Commentaires :** partie c) peu traitée.]

I 8) Montrons par récurrence sur i que $\sigma(F_i) + \sigma(G_i) = \sigma(E)$.

Pour $i = 0$, on a $F_0 = \{0\}$ et $G_0 = E$ donc c'est clair. Il suffit donc de montrer, pour chaque $i < p$, que

$$(?) \qquad \sigma(F_i) + \sigma(G_i) = \sigma(F_{i+1}) + \sigma(G_{i+1}).$$

D'abord on a $F_{i+1} = F_i \oplus \mathbb{C}u_{i+1}$ (somme orthogonale) donc

$$(*) \qquad \sigma(F_{i+1}) = \sigma(F_i) + \sigma(\mathbb{C}u_{i+1}).$$

Ensuite, $G_{i+1} = G_i \cap (\mathbb{C}u_{i+1})^\perp$ donc c'est aussi l'orthogonal de $\mathbb{C}u_{i+1}$ dans G_i. Appliquant la question 7) à l'élément u_{i+1} de l'espace G_i, on trouve

$$(**) \qquad \sigma(G_i) = \sigma(G_{i+1}) + \sigma(\mathbb{C}u_{i+1}).$$

Les égalités $(*)$ et $(**)$ donnent immédiatement (?).

[**Commentaires :** certains affirment que $G_i = G_{i+1} \oplus \mathbb{C}u_{i+1}$, alors qu'il se peut très bien que $u_{i+1} \in G_{i+1}$.]

II Espaces sesquilinéaires

II 1) a) La formule équivaut à

$$b\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i\,, \sum_{j=1}^{n} y_j\, e_j\Big) = \sum_{1\le i,j\le n} x_i\, \overline{y_j}\, b(e_i, e_j)$$

qui résulte aussitôt de la sesquilinéarité.
b) et c) Soit $y \in E$, de matrice colonne Y. Montrons l'équivalence

$$y \in E^\perp \Leftrightarrow M\,\overline{Y} = 0.$$

L'implication $\Leftarrow$ est une conséquence triviale de a). Réciproquement, soit X_i la matrice colonne de e_i $(1 \le i \le n)$: alors ${}^t(X_i)M\,\overline{Y}$ est le coefficient de la i-ième ligne de $M\,\overline{Y}$. Or si $y \in E^\perp$ alors ${}^t(X_i)M\,\overline{Y} = 0$ pour chaque i, donc $M\,\overline{Y} = 0$, cqfd.
[**Commentaires :** il faut *justifier* l'implication « si ${}^tX\,M\,\overline{Y} = 0$ pour tout X, alors $M\,\overline{Y} = 0$ ». Dans le cas où M est supposée inversible, au lieu de prendre pour X les vecteurs de base comme on l'a fait ici, certains ont eu recours à l'astuce, très efficace, de prendre $X = {}^tY\,M^{-1}$. Encore faut-il, dans ce cas, bien distinguer b du produit hermitien standard sur $\mathbb{C}^n$.]

On a par suite les équivalences (où les lettres Z et Y désignent des matrices colonnes à n lignes) :

$$\begin{aligned} M \text{ n'est pas inversible } &\Leftrightarrow \exists Z \neq 0 \text{ tel que } MZ = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists Y \neq 0 \text{ tel que } M\,\overline{Y} = 0 \\ &\Leftrightarrow E^\perp \neq \{0\}. \end{aligned}$$

Un raisonnement analogue montre (pour $x \in E$, de matrice colonne X) :

$$x \in {}^\perp E \Leftrightarrow {}^tX\,M = 0 \Leftrightarrow {}^tM\,X = 0$$

(la seconde équivalence par transposition) d'où l'on tire l'équivalence

$${}^tM \text{ n'est pas inversible } \Leftrightarrow {}^\perp E \neq \{0\}.$$

Comme M est inversible si et seulement si ${}^tM$ l'est, on en déduit b) et c).
[**Commentaires :** l'organisation des questions b) et c) varie beaucoup d'une copie à l'autre. On observe d'autre part de fréquentes insuffisances dans le maniement des quantificateurs, avec des incantations du genre « $\forall X,\ {}^tX\,M\,\overline{Y} = 0 \ \Rightarrow\ Y = 0$ », *sans aucune parenthèse* permettant d'en percer le sens.]

II 2) a) Pour $y \in E$, $(\mathbb{C}y)^\perp$ est le noyau de l'application de E dans $\mathbb{C}$ donnée par $x \mapsto \overline{b(y,x)}$. Cette application est $\mathbb{C}$-linéaire donc $(\mathbb{C}y)^\perp$ est un sous-espace de E. Maintenant, si F est un sous-espace de E, alors $F^\perp$ est l'intersection des $(\mathbb{C}y)^\perp$ pour $y \in F$ donc est encore un sous-espace.

Même raisonnement pour l'orthogonal à gauche (considérer $x \mapsto b(x, y)$).

[**Commentaires :** la plupart ont procédé de manière terre-à-terre, en montrant que $F^{\perp}$ est stable par combinaison linéaire... mais en oubliant, pour beaucoup, de dire que $0 \in F^{\perp}$!]

b) On considère le dual E^* (resp. F^*) de E (resp. de F) et l'application

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & E & \longrightarrow & E^* \\ & y & \longmapsto & (x \mapsto b(x, y)) \end{array}$$

qui est $\mathbb{R}$-linéaire.

On a d'autre part une application

$$\mathrm{res}_F : E^* \longrightarrow F^*$$

(restriction d'une forme linéaire à F) qui est $\mathbb{C}$-linéaire et *surjective* (comme F admet un supplémentaire dans E, toute forme linéaire sur F se prolonge à E).

Il est immédiat sur les définitions que

$$F^{\perp} = \ker(\mathrm{res}_F \circ \varphi : E \to F^*)$$

ce qui implique, puisque $\mathrm{res}_F \circ \varphi$ est $\mathbb{R}$-linéaire, que

$$\dim_{\mathbb{R}} F^{\perp} \geq \dim_{\mathbb{R}} E - \dim_{\mathbb{R}} F^*$$

et, comme on a $\dim_{\mathbb{R}} V = 2 \dim V$ pour tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel V, on en tire

$$\dim F^{\perp} \geq \dim E - \dim F^* = \dim E - \dim F$$

car $\dim F^* = \dim F$, d'où l'inégalité pour $F^{\perp}$.

[**Commentaires :** l'application φ n'est pas $\mathbb{C}$-linéaire (sauf si b est nulle) mais semi-linéaire, ce que quelques-uns n'ont pas vu. Personne n'a remarqué que la $\mathbb{R}$-linéarité suffisait.

Dans les copies ayant donné des preuves correctes de l'inégalité, la méthode employée consiste en général, en prenant une base de F, à constater que $F^{\perp}$ et ${}^{\perp}F$ sont chacun l'intersection de $\dim F$ hyperplans. Ceci donne l'inégalité des dimensions, mais les choses se compliquent ensuite pour l'égalité dans le cas non dégénéré.

Pour contourner le problème de la semi-linéarité, quelques-uns ont considéré l'application $\varphi' : E \to E^*$ « définie par $\varphi'(y)(x) = b(x, \overline{y})$ ». Le malheur est que $\overline{y}$ n'a pas de sens ! Pour faire de cet artifice une vraie bonne idée, on peut fixer une base $\mathcal{B}$ de E et définir $\overline{y}$ en conjuguant les coordonnées de y. L'application φ' est alors bien définie et $\mathbb{C}$-linéaire. Cependant, le noyau de $\mathrm{res}_F \circ \varphi'$ n'est pas $F^{\perp}$ mais son conjugué $\overline{F^{\perp}}$ et il faut alors soit montrer qu'un sous-espace et son conjugué ont même dimension, soit choisir pour $\mathcal{B}$ une base de E prolongeant une base de $F^{\perp}$, ce qui assure que $F^{\perp} = \overline{F^{\perp}}$.

Enfin, certains ont cru pouvoir montrer que $F + F^{\perp} = F + {}^{\perp}F = E$, ce qui est faux en général, comme d'ailleurs pour les formes bilinéaires.]

Supposons b non dégénérée : alors $\varphi : E \to E^*$ est injective (de façon générale, $\ker \varphi = E^\perp$) donc bijective (comme application $\mathbb{R}$-linéaire injective entre espaces de même dimension finie). Donc $\mathrm{res}_F \circ \varphi : E \to F^*$ est surjective et l'inégalité des dimensions est une égalité dans ce cas ; on en tire bien $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$.

On déduit l'inégalité pour ${}^\perp F$ de celle pour $F^\perp$ en appliquant cette dernière à la forme sesquilinéaire $\tilde{b}$ définie par $\tilde{b}(x, y) = \overline{b(y, x)}$: l'orthogonal à gauche pour b coïncide avec l'orthogonal à droite pour $\tilde{b}$. Même chose pour le cas non dégénéré en remarquant que, trivialement, $\tilde{b}$ est non dégénérée si et seulement si b l'est.

Profitons-en pour en déduire (ce sera utile plus tard) que si b est non dégénérée on a

$$ {}^\perp(F^\perp) = ({}^\perp F)^\perp = F. $$

En effet, l'inclusion $F \subset {}^\perp(F^\perp)$ est triviale sur la définition, et la formule des dimensions ci-dessus implique que les deux espaces ont même dimension (finie), d'où l'égalité. Même chose pour $({}^\perp F)^\perp$.

c) Notons b_F la restriction de b à F. L'orthogonal à droite (resp. à gauche) de F pour la forme b_F n'est autre que $F \cap F^\perp$ (resp. $F \cap {}^\perp F$) de sorte que l'on a les équivalences

$$ b \text{ est non dégénérée sur } F \quad \Leftrightarrow \quad F \cap F^\perp = \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad F \cap {}^\perp F = \{0\}. $$

Ces conditions entraînent que $\dim F^\perp \leq \dim E - \dim F$ et $\dim {}^\perp F \leq \dim E - \dim F$; comme on a les inégalités en sens inverse d'après b), on en tire $\dim F^\perp = \dim {}^\perp F = \dim E - \dim F$ ce qui, joint au fait que $F \cap F^\perp = F \cap {}^\perp F = \{0\}$, implique bien que $E = F \oplus F^\perp = F \oplus {}^\perp F$.

[**Commentaires :** confusion fréquente, pour la partie c), entre « b est non dégénérée » et « b est non dégénérée sur F ».]

II 3) Le sous-espace $F = \mathbb{C}e_1$ de E vérifie $F^\perp = F$ (dimension 1) et ${}^\perp F = E$ (dimension 2).

[**Commentaires :** autre solution parfois donnée, bien que moins simple : le sous-espace G engendré par $e_1 - e_2$ vérifie $G^\perp = E$ et ${}^\perp G = G$.]

II 4) Fixons une base $\mathcal{B}$ de E, et soit M la matrice de b dans cette base. Cherchons f par sa matrice A, qui doit vérifier les deux conditions (avec $n = \dim E$) :

(i) $A \in \mathrm{GL}\,(n, \mathbb{C})$

(ii) $\forall X, Y, \quad {}^t(AX)M\overline{Y} = \overline{{}^t(AY)M\overline{X}}$

où le $\forall$ porte sur les matrices colonnes complexes X, Y à n lignes. La condition (ii) s'écrit encore (en remarquant que les deux membres sont des matrices $(1, 1)$ donc symétriques...) :

$$ \forall X, Y, \quad {}^tX\,{}^tAM\overline{Y} = {}^tX\,{}^t\overline{M}\,\overline{A}\,\overline{Y} $$

qui sera vérifiée si (et seulement si, en fait) ${}^tAM = {}^t\overline{M}\,\overline{A}$, c'est-à-dire dès que ${}^tAM$ *est une matrice hermitienne*. Le problème est donc équivalent au suivant :

« étant donnée $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, trouver $S \in \mathrm{GL}\,(n, \mathbb{C})$ telle que SM soit hermitienne. »

[**Commentaires :** on observera que la réponse est évidente lorsque M est inversible : il suffit de prendre $S = M^{-1}$. Sinon, plusieurs arguments sont possibles car il n'y a pas de choix « naturel » pour S, ce qui constitue peut-être la difficulté de cette question, presque jamais traitée et d'ailleurs inutile pour la suite.]

Solution 1 : on sait (« décomposition polaire ») que M peut s'écrire sous la forme $M = UH$ avec $U \in \mathrm{U}(n, \mathbb{C})$ et H hermitienne positive. Il suffit donc de prendre $S = U^{-1}$.

[**Commentaires :** c'est la méthode employée dans l'unique copie ayant donné une solution « presque » correcte, avec hélas une erreur dans l'énoncé de la décomposition polaire.]

Solution 2 : on sait qu'il existe des matrices U et V dans $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ telles que

$$UMV^{-1} = D = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix}$$

où r est le rang de M. On a donc $UM = DV$, d'où

$${}^t\overline{V}UM = {}^t\overline{V}DV$$

qui est manifestement hermitienne puisque D est réelle et symétrique. La matrice $A = {}^tU\overline{V}$ vérifie donc (i) et (ii), cqfd.

Solution 3 : étant données deux applications linéaires $f, g : E \to F$ entre espaces vectoriels de dimension finie sur un corps k, la condition « il existe $u \in \mathrm{Aut}_k(F)$ tel que $u \circ f = g$ » est équivalente à « $\ker f = \ker g$ » (la seconde condition implique en effet par passage au quotient qu'il existe un isomorphisme $u_0 : \mathrm{Im}\, f \to \mathrm{Im}\, g$ tel que $u_0 \circ f = g$, et il suffit de prolonger u_0 en un automorphisme de F en choisissant des supplémentaires).

Il nous suffit donc de trouver une matrice hermitienne ayant même noyau que M. Or, en notant $M^* = {}^t\overline{M}$, la matrice M^*M a bien cette propriété, comme il résulte facilement de la formule $\langle M^*MX, Y\rangle = \langle MX, MY\rangle$ où $\langle\ ,\ \rangle$ désigne le produit hermitien standard.

(On a donc montré, plus précisément, qu'il existe $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ telle que $SM = M^*M$; on pouvait aussi, au lieu de M^*M, prendre la projection orthogonale sur l'orthogonal du noyau de M, toujours pour le produit hermitien standard)

II 5) a) Comme b est non nulle, il existe x et y dans E tels que $b(x, y) \neq 0$. On a $b(x, y) = \varepsilon\, \overline{b(y, x)}$; remplaçant dans cette relation $b(y, x)$ par $\varepsilon\, \overline{b(x, y)}$, on obtient $b(x, y) = \varepsilon\, \overline{\varepsilon}\, b(x, y)$, d'où $\varepsilon\, \overline{\varepsilon} = 1$ puisque $b(x, y) \neq 0$, cqfd.

b) Il existe $\eta \in \mathbb{C}^*$ tel que $\eta^2 = \varepsilon$: remarquer de plus que $|\eta| = 1$, puisque $|\varepsilon| = 1$. Donc $\eta\, \overline{\eta} = 1$.

On prend alors $E = \mathbb{C}$, et b définie par $b(x, y) = \eta\, x\, \overline{y}$ pour $x, y \in \mathbb{C}$. On a alors :

$$\begin{aligned} \varepsilon\, \overline{b(y, x)} &= \eta^2\, \overline{\eta}\, x\, \overline{y} \\ &= \eta\, x\, \overline{y} \qquad \text{(puisque } \eta\, \overline{\eta} = 1) \\ &= b(x, y), \qquad \text{cqfd.} \end{aligned}$$

[**Commentaires :** bien entendu ε fait partie des données ; il ne suffit pas, comme l'ont fait queques-uns, de donner un exemple avec, disons, $\varepsilon = 1$.

Autre exemple donné parfois : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$, et des variantes. On peut regretter que seule une minorité ait pensé à chercher un exemple de dimension 1. Cela devrait pourtant être un réflexe : *le meilleur (contre-)exemple est le plus simple.*]

II 6) a) Il existe un nombre complexe α tel que $\overline{\alpha}^2 = \varepsilon$; de plus α est de module 1 de sorte que $\alpha\,\overline{\alpha} = 1$. Vérifions que $\alpha\, b$ est symétrique : on a $\alpha\, b(x,y) = \alpha\,\varepsilon\,\overline{b(y,x)} = \alpha\,\overline{\alpha}^2\,\overline{b(y,x)} = \overline{\alpha}\,\overline{b(y,x)} = \overline{\alpha\, b(y,x)}$, cqfd.

[**Commentaires :** la plupart sont arrivés à la condition $\varepsilon = \overline{\alpha}/\alpha$. Quelques-uns ont alors simplement omis de montrer l'existence d'un tel α ; d'autres ont cherché α sous la forme $x + iy$ et se sont évidemment enferrés dans les calculs.

Dans un cas aussi simple, il n'est pas nécessaire de détailler sur la copie les calculs ayant conduit à la relation $\overline{\alpha}^2 = \varepsilon$. Une rédaction du genre « écrivant $\varepsilon = e^{i\theta}$, montrons que $\alpha = e^{-i\theta/2}$ convient (...) » devrait parfaitement satisfaire le correcteur !]

b) Si b est nulle (ce qui n'est pas exclu par l'énoncé), la forme $\beta\, b$ est symétrique quel que soit $\beta \in \mathbb{C}^*$. De plus, dans ce cas, $\sigma(E, \beta\, b) = \sigma(E, 0) = 0$.

[**Commentaires :** ce cas a été oublié dans la plupart des copies, ainsi que dans le corrigé officiel.]

Supposons maintenant b non nulle, et posons $\rho = \beta/\alpha$. La symétrie de βb équivaut à $\rho\,\alpha\, b(x,y) = \overline{\rho}\,\overline{\alpha\, b(y,x)}$ pour tout $(x,y) \in E^2$. Comme $\alpha\, b$ est symétrique, ceci équivaut à $\rho\,\alpha\, b(x,y) = \overline{\rho}\,\alpha\, b(x,y)$. Comme $\alpha \neq 0$ et que $b(x,y) \neq 0$ pour au moins un couple (x,y), on voit donc que

$$\text{si } b \neq 0, \text{ alors } \beta\, b \text{ est symétrique si et seulement si } \rho = \beta/\alpha \in \mathbb{R}^*.$$

[**Commentaires :** certains sont arrivés à la condition $\alpha\,\overline{\beta} = \overline{\alpha}\,\beta$, sans voir la forme équivalente ci-dessus : il faut apprendre à manier les nombres complexes !]

Supposant cette condition réalisée, soit $\mathcal{B}$ une base semi-orthonormée pour $\alpha\, b$. Alors $|\rho|^{-1/2}\mathcal{B}$ est une base semi-orthonormée pour $\beta\, b = \rho\,\alpha\, b$, et si e est un élément de $\mathcal{B}$, on a

$$\rho\,\alpha\, b(|\rho|^{-1/2}e, |\rho|^{-1/2}e) = \rho\,|\rho|^{-1}\alpha\, b(e,e).$$

Puisque ρ est réel, $\rho\,|\rho|^{-1}$ est le signe de ρ, d'où finalement :

$$\sigma(E, \beta\, b) = (\text{signe de } \beta/\alpha)\,\sigma(E, \alpha\, b).$$

[**Commentaires :** il fallait évidemment avoir compris la définition de la signature. Même ainsi, certains ont fait comme si la base semi-orthonormée pour $\alpha\, b$ l'était aussi pour $\beta\, b$.]

III Espaces semiquadratiques

III 1) Pour tout $(x,y) \in E^2$, on a par hypothèse $b(x,y) = u\,\overline{b(y,x)} + \alpha\, f(x)\,\overline{f(y)}$ et d'autre part (en « échangeant x et y »), $b(y,x) = u\,\overline{b(x,y)} + \alpha\, f(y)\,\overline{f(x)}$; reportant cette valeur de $b(y,x)$ dans la première relation, il vient $b(x,y) = u\,\overline{u}\, b(x,y) + u\,\overline{\alpha}\, f(x)\,\overline{f(y)} + \alpha\, f(x)\,\overline{f(y)}$. Comme $u\,\overline{u} = 1$ par hypothèse, ceci donne

$$(u\,\overline{\alpha} + \alpha)\, f(x)\,\overline{f(y)} = 0$$

et comme f est supposée non nulle, on en déduit bien $u = -\alpha/\overline{\alpha} = \varepsilon$.

[**Commentaires :** principaux défauts rencontrés : suites de calculs sans explication, et « oubli » de préciser où sert l'hypothèse $f \neq 0$.]

III 2) a) Comme b est non dégénérée, l'application $\varphi : E \to E^*$ définie par $\varphi(y)(x) = b(x,y)$ est bijective (*cf.* II 2)). Il existe en particulier un unique $e \in E$ tel que $\varphi(e) = f$, ce qui est la condition de l'énoncé.

[**Commentaires :** presque aucune démonstration correcte dans les copies parce qu'à nouveau, ceux qui ont bien vu la méthode n'ont pas vu que φ n'était pas $\mathbb{C}$-linéaire. Quant au corrigé officiel, il est particulièrement expéditif si l'on considère que les formes sesquilinéaires, contrairement aux formes bilinéaires, ne sont pas au programme.

On pouvait aussi s'en tirer en cherchant le vecteur centre par sa matrice C dans une base fixée de E, en fonction des matrices M de b et L de f : on trouve tout de suite $\overline{C} = M^{-1}\,{}^tL$.]

Appliquant ladite condition à $x = e$, on obtient notamment

$$b(e,e) = f(e) = \frac{1-\lambda}{\overline{\alpha}}.$$

D'autre part la relation (SQ), appliquée à $x = y = e$, donne $b(e,e) - \varepsilon\,\overline{b(e,e)} = \alpha\, f(e)\,\overline{f(e)}$; reportant les valeurs de $b(e,e)$ et $f(e)$ trouvées ci-dessus, et la définition de ε, on obtient

$$\frac{1-\lambda}{\overline{\alpha}} + \frac{\alpha}{\overline{\alpha}}\,\frac{1-\overline{\lambda}}{\alpha} = \alpha\,\frac{(1-\lambda)\,(1-\overline{\lambda})}{\alpha\,\overline{\alpha}}$$

ce qui, en multipliant par $\overline{\alpha}$ et en développant, donne bien $\lambda\,\overline{\lambda} = 1$.

b) Soient λ et λ' les poids respectifs de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$; soit $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ un isomorphisme, et soit e le vecteur centre de $\mathcal{E}$. Vérifions que $e' = \varphi(e)$ est le vecteur centre de $\mathcal{E}'$: on a en effet, pour tout $x' \in E'$:

$$\begin{array}{lll} b'(x',\varphi(e)) & = b'(\varphi(\varphi^{-1}(x')),\varphi(e)) & (\varphi \text{ est une bijection}) \\ & = b(\varphi^{-1}(x'),e) & (\varphi \text{ est un morphisme}) \\ & = f(\varphi^{-1}(x') & (\text{définition de } e) \\ & = f'(\varphi(\varphi^{-1}(x')) & (f' \circ \varphi = f) \\ & = f'(x') & \end{array}$$

ce qui caractérise bien le vecteur centre.

Comme on a $f(e) = f'(e')$ puisque $f' \circ \varphi = f$, on en tire $\frac{1-\lambda}{\overline{\alpha}} = \frac{1-\lambda'}{\overline{\alpha}}$, d'où $\lambda = \lambda'$.

[**Commentaires :** principaux défauts : ne pas expliquer les notations (ici λ, λ', e, e', φ), et ne pas faire ressortir clairement le point essentiel, qui est que $\varphi(e) = e'$. La démonstration de ce dernier point est d'ailleurs souvent maladroite dans les copies ; c'est pourquoi on l'a détaillée ici.]

c) Si $\mathcal{E} = (E,b,f)$ est de type T0, alors par définition $f = 0$, et il est donc clair que $e = 0$ est le vecteur centre de $\mathcal{E}$. D'autre part le poids λ vérifie $\frac{1-\lambda}{\overline{\alpha}} = f(e) = 0$, d'où $\lambda = 1$.

III 3) Remarquons d'abord que comme $\mathcal{E}$ est de type T1, on a $f \neq 0$ et donc $e \neq 0$ (clair d'après la définition de e).

[**Commentaires :** ce point a été presque toujours omis...]

En particulier, si x (non nul par hypothèse) est colinéaire à e, on a $\mathbb{C}x = \mathbb{C}e$ donc

$$F = {}^{\perp}(\mathbb{C}e) = \{y \in E \mid b(y,e) = 0\} = \{y \in E \mid f(y) = 0\} = \ker f.$$

Réciproquement, si $F = \ker f$ alors les deux formes linéaires non nulles f et $y \mapsto b(y,x)$ ont même noyau donc sont proportionnelles : il existe $u \in \mathbb{C}^*$ tel que $f(y) = u\, b(y,x)$ pour tout $y \in E$, ce qui s'écrit encore $b(y,e) = b(y, \overline{u}\, x)$, ou $b(y, e - \overline{u}\, x) = 0$. Autrement dit, $e - \overline{u}\, x \in E^{\perp}$ donc $e = \overline{u}\, x$ puisque b est non dégénérée, cqfd.

On vient de voir que $\ker f = {}^{\perp}(\mathbb{C}e)$, donc par une remarque faite en II 2 b) on en tire, puisque b est non dégnérée :

$$(\ker f)^{\perp} = ({}^{\perp}(\mathbb{C}e))^{\perp} = \mathbb{C}e.$$

III 4) Soit b une forme sesquilinéaire sur $\mathbb{C}$: alors b est de la forme $b(x,y) = c\, x\overline{y}$, où c est un nombre complexe (à savoir $c = b(1,1)$).

Supposons que $\mathcal{E} = (\mathbb{C}, b, f = \mathrm{Id})$ soit α-SQ de poids $\lambda \neq 1$ donné, de module 1. Si $e \in \mathbb{C}$ est le vecteur centre de $\mathcal{E}$, alors par définition du poids on a

$$e = f(e) = (1-\lambda)/\overline{\alpha}$$

ce qui détermine e. On a donc :

$$\begin{aligned} 1 &= f(1) && \text{(définition de } f\text{)} \\ &= b(1,e) && \text{(définition du vecteur centre)} \\ &= b(1, \tfrac{1-\lambda}{\overline{\alpha}}) && \text{(calcul de } e \text{ ci-dessus)} \\ &= \tfrac{1-\overline{\lambda}}{\alpha}\, b(1,1) && \text{(sesquilinéarité)} \end{aligned}$$

d'où $b(1,1) = \alpha/(1-\overline{\lambda})$ (on rappelle que $\lambda \neq 1$) et finalement

$$b(x,y) = \frac{\alpha}{1-\overline{\lambda}}\, x\,\overline{y}$$

pour tous x et y dans $\mathbb{C}$. Ceci montre l'unicité de b.

[**Commentaires :** les calculs de la partie « unicité » sont notablement abrégés si l'on pense comme ci-dessus à chercher d'abord le vecteur centre. Sinon, on peut procéder ainsi : une forme sesquilinéaire sur $\mathbb{C}$ est de la forme $b(x,y) = c\, x\overline{y}$, où $c \in \mathbb{C}$; on cherche à quelle condition sur c la forme en question est α-SQ (on trouve $\Re\,(c/\alpha) = 1/2$), puis on cherche le vecteur centre (qui est $e = 1/\overline{c}$), et le poids λ : celui-ci vérifie $c = \alpha/(1-\overline{\lambda})$ donc détermine c de manière unique s'il est $\neq 1$. La plupart se sont noyés dans les calculs, qui demandaient plus de sang-froid que de virtuosité.]

Réciproquement, il est clair que la formule ci-dessus définit une forme sesquilinéaire b sur $\mathbb{C}$, non dégénérée puisque $\alpha/(1-\overline{\lambda}) \neq 0$. Il reste à vérifier, pour $(\mathbb{C}, b, \mathrm{Id})$, la relation (SQ). Celle-ci s'écrit, après simplification par $x\,\overline{y}$ et par α :

$$\frac{1}{1-\lambda} + \frac{1}{1-\overline{\lambda}} = 1$$

ce qui résulte de l'hypothèse $\lambda\,\overline{\lambda} = 1$, cqfd.

Montrons la deuxième assertion de III 4). On a déjà vu en III 2 b) que le poids est invariant par isomorphie, d'où le « seulement si ».

Soit maintenant $\mathcal{E} = (E, b, f)$ un espace α-SQ de dimension 1, de type T1, de vecteur centre e et poids λ. Nous allons montrer les assertions suivantes :

(i) $\lambda \neq 1$;

(ii) $\mathcal{E}$ est isomorphe à un espace sesquilinéaire symétrique de la forme $(\mathbb{C}, \beta, \mathrm{Id})$.

Ces assertions impliquent la partie « si » de la question : si $\mathcal{E}'$ est un autre espace α-SQ de dimension 1 et de poids λ, alors il est isomorphe à un certain $(\mathbb{C}, \beta', \mathrm{Id})$, également de poids λ ; comme $\lambda \neq 1$ on déduit de la première partie de la question que $\beta = \beta'$, donc $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont bien isomorphes.

Pour montrer (i), on remarque (comme on l'a dit en II 3)) que $e \neq 0$, ce qui implique $f(e) \neq 0$ puisque $f : E \to \mathbb{C}$ est un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. Par suite, on a $\lambda \neq 1$. Pour (ii), comme (derechef) $f : E \to \mathbb{C}$ est un isomorphisme, on en déduit par transport de structure une forme sesquilinéaire b' sur $\mathbb{C}$, telle que f soit un isomorphisme d'espaces semiquadratiques de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}' := (\mathbb{C}, b', \mathrm{Id})$, cqfd.

[**Commentaires :** à nouveau, oubli (y compris dans le corrigé officiel) de vérifier que $\lambda \neq 1$ pour pouvoir appliquer le début de la question.]

III 5) a) D'après (SQ), on a $b(x,x) - \varepsilon\,\overline{b(x,x)} = \alpha\, f(x)\,\overline{f(x)} = \alpha$ puisque $f(x) = 1$, d'où en divisant par α (et en se rappelant que $\varepsilon = -\alpha/\overline{\alpha}$) :

$$\frac{b(x,x)}{\alpha} + \frac{\overline{b(x,x)}}{\overline{\alpha}} = 1$$

c'est-à-dire $2\,\mathfrak{R}(b(x,x)/\alpha) = 1$, cqfd.

[**Commentaires :** la suite de la partie III n'a pratiquement pas été traitée, à part quelques incursions dans la question 6).]

b) Comme $\lambda = 1$, on a $f(e) = b(e,e) = 0$. Comme $\mathcal{E}$ est de type T1, on a $f \neq 0$ donc il existe $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = 1$. Cherchons x sous la forme $x_0 + c\,e$ ($c \in \mathbb{C}$) : on aura bien $f(x) = 1$ puisque $f(e) = 0$. On a $b(x,x) = b(x_0,x_0) + \overline{c}\, b(x_0,e) + c\, b(e,x_0)$; d'une part $b(x_0,e) = f(x_0) = 1$, et d'autre part (SQ) donne pour tout $z \in E$

$$b(e,z) = \varepsilon\,\overline{b(z,e)} = \varepsilon\,\overline{f(z)}.$$

D'où

$$b(x,x) = b(x_0,x_0) + \overline{c} + c\,\varepsilon\,\overline{f(x_0)} = b(x_0,x_0) + \overline{c} + c\,\varepsilon.$$

On cherche donc c tel que

$$\frac{1}{2} = \frac{b(x_0,x_0)}{\alpha} + \frac{\overline{c}}{\alpha} - \frac{c}{\overline{\alpha}}.$$

Mais d'après III 5 a), $\frac{b(x_0,x_0)}{\alpha}$ est de la forme $\frac{1}{2} + i\,t$ ($t \in \mathbb{R}$) de sorte que cette équation s'écrit $2\,\mathfrak{I}(\frac{\overline{c}}{\alpha}) = -t$. Il suffit donc de choisir c vérifiant $\mathfrak{I}(\frac{\overline{c}}{\alpha}) = -\frac{t}{2}$ pour obtenir les propriétés voulues.

c) Gardons les notations de b) : alors (e, x) est une base de E puisque $e \neq 0$ (sinon E serait de type T0) et $f(e) = 0$ alors que $x \notin \ker f$. De plus on a vu que $b(x, x) = \alpha/2$ par construction, $f(e) = b(e, e) = 0$, $b(x, e) = f(x) = 1$ d'où $b(e, x) = \varepsilon$. La matrice de b dans la base (e, x) est donc $M = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ 1 & \alpha/2 \end{pmatrix}$, et celle de f est $L = (\,0 \quad 1\,)$.

L'isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^2$ dans E donné par $(u, v) \mapsto u\,e + v\,x$ est donc en fait un isomorphisme d'espaces α-SQ, lorsque l'on munit $\mathbb{C}^2$ de la forme sesquilinéaire de matrice M et de la forme linéaire de matrice L. Comme ces matrices ne dépendent que de α, la conclusion en résulte.

III 6) Numérotons de (i) à (v) les cinq formules de l'énoncé (ce que le rédacteur eût été bien inspiré de faire).

L'existence et l'unicité de f'' vérifiant (i) est évidente.

Supposons trouvée b'' vérifiant (ii) à (v), et soient $x', y' \in E'$ et $x, y \in E$. On déduit de (SQ) la relation

$$\begin{aligned} b''((0, x'), (y, 0)) &= \varepsilon\, \overline{b''((y, 0), (0, x'))} + \alpha\, f''(0, x')\, \overline{f''(y, 0)} \\ &= 0 + \alpha\, f'(x')\, \overline{f(y)} \end{aligned}$$

d'où (en écrivant $(x, x') = (x, 0) + (0, x')$ et de même pour (y, y'), et en appliquant (ii), (iii) et (iv)) la relation

$$b''((x, x'), (y, y')) = b(x, y) + b'(x', y') + \alpha\, f'(x')\, \overline{f(y)}$$

qui montre l'unicité de b''. Il reste à vérifier que b'' *ainsi définie* vérifie les propriétés voulues. C'est immédiat pour (ii), (iii) et (iv) ainsi que pour la sesquilinéarité. Vérifions la relation (SQ). Comme les deux membres de (SQ) sont $\mathbb{R}$-bilinéaires et que $E \times E'$ est engendré par $E \times \{0\}$ et $\{0\} \times E'$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, il suffit de le faire successivement :

– pour les couples $((x, 0), (y, 0))$: résulte de (SQ) dans E ;
– pour les couples $((0, x'), (0, y'))$: résulte de (SQ) dans E' ;
– pour les couples $((0, x'), (y, 0))$: par construction (calcul ci-dessus) ;
– pour les couples $((x, 0), (0, y'))$: on a, en appliquant la définition de b'' :

$$\begin{aligned} b''((x, 0), (0, y')) - \varepsilon\, \overline{b''((0, y'), (x, 0))} &= 0 - \varepsilon\, \overline{\alpha\, f'(y')\, \overline{f(x)}} \\ &= \frac{\alpha}{\overline{\alpha}}\, \overline{\alpha}\, f(x)\, \overline{f'(y')} \\ &= \alpha\, f(x)\, \overline{f'(y')} \\ &= \alpha\, f''(x, 0)\, \overline{f''(0, y')}, \quad \text{cqfd.} \end{aligned}$$

Il reste à voir que b'' est non dégénérée. Soit donc $(x, x') \in {}^{\perp}E''$. Pour tout $y' \in E'$ on a

$$0 = b''((x, x'), (0, y')) = b'(x', y')$$

donc $x' \in {}^{\perp}E'$, d'où $x' = 0$ puisque b' est non dégénérée. Donc (x, x') est de la forme $(x, 0)$ et vérifie pour tout $y \in E$ la relation $0 = b''((x, 0), (y, 0)) = b(x, y)$. Donc $x \in {}^{\perp}E$ et à nouveau $x = 0$, cqfd.

[**Commentaires :** le corrigé officiel omet de vérifier la condition (SQ) pour b''.]

III 7) Pour voir que $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}^\perp$ et ${}^\perp\mathcal{F}$ sont α-SQ, la seule chose non triviale est de montrer que b_0, b_1 et b_2 sont non dégénérées.

Or b_0 l'est par hypothèse; ceci équivaut à $F\cap F^\perp = \{0\}$ donc aussi à ${}^\perp(F^\perp)\cap F^\perp = \{0\}$ puisque ${}^\perp(F^\perp) = F$ comme on l'a dit en II 2 b). Donc b est également non dégénérée sur $F^\perp$, autrement dit, b_1 est non dégénérée. Même raisonnement pour b_2.

Montrons que $\mathcal{E}$ est isomorphe à $\mathcal{F} \times \mathcal{F}^\perp$. Comme $E = F \oplus F^\perp$ d'après II 2 c), l'application

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & F \times F^\perp & \longrightarrow & E \\ & (x, x') & \longmapsto & x + x' \end{array}$$

est un isomorphisme. Elle induit donc par transport de structure une structure d'espace α-SQ $\mathcal{F}'' = (F'', b'', f'')$ sur $F'' := F \times F^\perp$, de sorte que φ est un isomorphisme de $\mathcal{F}''$ sur $\mathcal{E}$. Il suffit de montrer que $\mathcal{F}''$ est le produit orthogonal $\mathcal{F} \times \mathcal{F}^\perp$, c'est-à-dire de montrer pour b'' et f'' les propriétés (i) à (v) de III 6) (*mutatis mutandis*, c'est-à-dire en remplaçant b par b_0, b' par b_1, etc.).

La propriété (i) est immédiate puisque $f'' = f \circ \varphi$. La propriété (v) l'est aussi puisque φ est un isomorphisme. Soient x et y dans F, x' et y' dans $F^\perp$. On a par définition (et puisque $b(x, y') = 0$) :

$$b''((x, x'), (y, y')) = b(x + x', y + y') = b_0(x, y) + b_1(x', y') + b(x', y)$$

d'où en particulier :

(ii) $b''((x, 0), (y, 0)) = b_0(x, y)$

(iii) $b''((0, x'), (0, y')) = b_1(x', y')$

(iv) $b''((x, 0), (0, y')) = 0$

qui sont les relations voulues.

[**Commentaires :** le corrigé officiel ne mentionne pas les vérifications ci-dessus.]

La démonstration pour ${}^\perp\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ est analogue; on peut aussi se ramener au cas de $\mathcal{F} \times \mathcal{F}^\perp$ en remplaçant F par ${}^\perp F$ (puisque $({}^\perp F)^\perp = F$ et que b est encore non dégénérée sur ${}^\perp F$).

III 8) Montrons que $(e, \lambda\, e')$ est le vecteur centre de $\mathcal{E}''$: utilisant la formule trouvée en III 6), on a, pour $x \in E$ et $x' \in E'$:

$$\begin{aligned} b''((x, x'), (e, \lambda\, e')) &= b(x, e) + \overline{\lambda}\, b'(x', e') + \alpha\, f'(x')\, \overline{f(e)} \\ &= f(x) + \overline{\lambda}\, f'(x') + \alpha\, \frac{1 - \overline{\lambda}}{\alpha}\, f'(x') \\ &= f(x) + f'(x') \\ &= f''(x, x') \end{aligned}$$

ce qui caractérise le vecteur centre. Pour trouver le poids, on écrit

$$f''(e, \lambda\, e') = f(e) + \lambda\, f'(e') = \frac{1 - \lambda}{\overline{\alpha}} + \lambda\, \frac{1 - \lambda'}{\overline{\alpha}} = \frac{1 - \lambda\, \lambda'}{\overline{\alpha}}$$

donc le poids de $\mathcal{E}''$ est bien $\lambda\,\lambda'$.

III 9) Si $\mathcal{E}$ est de type T0, alors $f = 0$ donc $F = E$ et b est non dégénérée sur F puisqu'elle l'est sur E.

Supposons maintenant $\mathcal{E}$ de type T1, et soit λ son poids. Alors F est un hyperplan de E, et l'on sait d'après III 3) que $F^\perp = \mathbb{C}\,e$, d'où les équivalences :

$$\begin{array}{llllllll} b \text{ est non dégénérée sur } F & \Leftrightarrow & F\cap F^\perp = \{0\} & \Leftrightarrow & F\cap \mathbb{C}\,e = \{0\} & & \\ & \Leftrightarrow & e\notin F & \Leftrightarrow & f(e)\neq 0 & \Leftrightarrow & \lambda \neq 1. \end{array}$$

Montrons que $i\,\overline{\alpha}\,b$ est symétrique sur F : pour x et y dans F, on a

$$\begin{aligned} i\,\overline{\alpha}\,b(x,y) - \overline{i\,\overline{\alpha}\,b(y,x)} &= i\,\overline{\alpha}\,b(x,y) + i\,\alpha\,\overline{b(y,x)} \\ &= i\,\overline{\alpha}\,\varepsilon\,\overline{b(y,x)} + i\,\alpha\,\overline{b(y,x)} \quad \text{(par (SQ) et } f(x)=f(y)=0) \\ &= (-i\,\alpha + i\,\alpha)\,\overline{b(y,x)} \\ &= 0, \quad \text{cqfd.} \end{aligned}$$

III 10) Notations : $\mathcal{E} = (E,b,f)$, $\mathcal{E}' = (E',b',f')$, $\mathcal{E}\times\mathcal{E}' = (E'',b'',f'')$, $\ker f = F$, $\ker f' = F'$, $\ker f'' = F''$.

Si $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{E}'$) est de type T0, alors $f''(x,x')$ est égal à $f'(x')$ (resp. à $f(x)$) pour tout $(x,x')\in E''$, de sorte que, dans les deux cas, $F'' = F\times F'$. Pour (x,x') et (y,y') dans F'', on a donc, vu la formule pour b'' :

$$i\,\overline{\alpha}\,b''((x,x'),(y,y')) = i\,\overline{\alpha}\,b(x,y) + i\,\overline{\alpha}\,b'(x',y')$$

de sorte que l'espace sesquilinéaire symétrique $(F'', i\,\overline{\alpha}\,b'')$ est somme orthogonale des espaces $(F, i\,\overline{\alpha}\,b)$ et $(F', i\,\overline{\alpha}\,b')$. L'additivité de σ pour les sommes orthogonales (*cf.* I 5)) donne donc

$$ps(\mathcal{E}\times\mathcal{E}') = ps(\mathcal{E}) + ps(\mathcal{E}').$$

III 11) a) On a $E_1\cap E_1^\perp = \{0\}$ de sorte que b est non dégénérée sur E_1. Nous sommes donc dans la situation de III 7), avec $F = E_1$ et $F^\perp = E_2$: on en conclut donc que E_1 et E_2, munis des restrictions de b et de f, sont des espaces α-SQ. L'hypothèse que f n'est nulle ni sur E_1 ni sur E_2 assure en outre que ces espaces sont bien de type T1.

Remarquons en outre que, d'après III 7), $\mathcal{E}$ est isomorphe à $\mathcal{E}_1\times\mathcal{E}_2$.

b) Montrons que l'on a en fait $(F_1\oplus F_2)^\perp = \mathbb{C}\,e_1\oplus\mathbb{C}\,e_2$, ce qui implique trivialement l'inclusion voulue. Comme $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ sont de type T1, F_1 (resp. F_2) est un hyperplan de E_1 (resp. E_2) de sorte que $\dim(F_1\oplus F_2) = \dim E - 2$, d'où $\dim(F_1\oplus F_2)^\perp = 2$ d'après II 2 b). Il suffit donc de voir que e_1 et e_2 appartiennent tous deux à $(F_1\oplus F_2)^\perp$ qui est trivialement égal à $F_1^\perp\cap F_2^\perp$ (où les orthogonaux sont pris dans E).

D'après III 3), pour $i\in\{1,2\}$, l'orthogonal à droite de F_i dans E_i est $\mathbb{C}\,e_i$ d'où le fait que $e_i\in F_i^\perp$. D'autre part il est clair que $e_2\in F_1^\perp$ car $e_2\in E_2 = E_1^\perp\subset F_1^\perp$.

Reste à voir que $e_1\in F_2^\perp$. Soit donc $x\in F_2$: on a $b(x,e_1) = \varepsilon\,\overline{b(e_1,x)} + \alpha\,f(x)\,\overline{f(e_1)}$. Or $b(e_1,x) = 0$ puisque $e_1\in E_1$ et $x\in E_2 = E_1^\perp$, et $f(x) = 0$ puisque $x\in F_2 = \ker(f_{|E_2})$, d'où $b(x,e_1) = 0$, cqfd.

Si les poids de $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ sont égaux à 1, alors $f(e_1) = f(e_2) = 0$ de sorte que $\mathbb{C}\, e_1 \oplus \mathbb{C}\, e_2 \subset F$, d'où $\mathbb{C}\, e_1 \oplus \mathbb{C}\, e_2 = F \cap (F_1 \oplus F_2)^{\perp}$ d'après ce qui précède.

De façon générale on a $F \cap (F_1 \oplus F_2)^{\perp} = F \cap (\mathbb{C}\, e_1 \oplus \mathbb{C}\, e_2) = \ker(f_{|\mathbb{C}\, e_1 \oplus \mathbb{C}\, e_2})$. Pour $(c, d) \in \mathbb{C}^2$ on a $f(c\, e_1 + d\, e_2) = c\, f(e_1) + d\, f(e_2)$. Si $(f(e_1), f(e_2)) \neq (0, 0)$ (c'est-à-dire si l'un des deux poids est différent de 1) ceci est nul si et seulement si (c, d) est proportionnel à $(-f(e_2), f(e_1))$, d'où le fait que $F \cap (F_1 \oplus F_2)^{\perp}$ est engendré par $f(e_2)\, e_1 - f(e_1)\, e_2$.

c) Comme $\mathcal{E}$ est isomorphe à $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$ comme on l'a dit en a), on déduit de III 8) (et de II 2 b)) que $\lambda = \lambda_1\, \lambda_2$.

Par définition on a $ps(\mathcal{E}) = \sigma(F, i\, \overline{\alpha}\, b)$. On applique le résultat de I 8) en y remplaçant l'inclusion $F \subset E$ par l'inclusion (évidente) $F_1 \oplus F_2 \subset F$, l'espace F étant évidemment muni de la forme sesquilinéaire symétrique $i\, \overline{\alpha}\, b$. On a donc

$$ps(\mathcal{E}) = \sigma(F, i\, \overline{\alpha}\, b) = \sigma(F_1 \oplus F_2, i\, \overline{\alpha}\, b) + \sigma(F \cap (F_1 \oplus F_2)^{\perp}, i\, \overline{\alpha}\, b)$$

(les orthogonaux à droite d'un sous-espace pour b et pour $i\, \overline{\alpha}\, b$ sont évidemment les mêmes).

Comme F_1 et F_2 sont orthogonaux, on a de plus par « additivité » de σ (observée en I 5)) l'égalité

$$\sigma(F_1 \oplus F_2, i\, \overline{\alpha}\, b) = \sigma(F_1, i\, \overline{\alpha}\, b) + \sigma(F_2, i\, \overline{\alpha}\, b) = ps(\mathcal{E}_1) + ps(\mathcal{E}_2).$$

d'où

$$ps(\mathcal{E}) - ps(\mathcal{E}_1) - ps(\mathcal{E}_2) = \sigma(F \cap (F_1 \oplus F_2)^{\perp}, i\, \overline{\alpha}\, b).$$

Notons $\mathcal{G}$ l'espace sesquilinéaire symétrique $(G, g) = (F \cap (F_1 \oplus F_2)^{\perp}, i\, \overline{\alpha}\, b)$. Il reste à calculer $\sigma(\mathcal{G})$:

– si $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, alors d'une part $\mathfrak{I}\lambda_1 = \mathfrak{I}\lambda_2 = \mathfrak{I}\lambda = 0$, et d'autre part on a vu en b) que G est égal à $\mathbb{C}\, e_1 \oplus \mathbb{C}\, e_2$ sur lequel, en outre, la forme $i\, \overline{\alpha}\, b$ est nulle : en effet e_1 et e_2 sont orthogonaux, et $b(e_1, e_1) = b(e_2, e_2) = 0$ vu l'hypothèse sur les poids. Donc $\sigma(\mathcal{G}) = 0$ dans ce cas, et la formule de l'énoncé est vérifiée.

– Si $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (1, 1)$, on sait que G est de dimension 1, engendré par $v := f(e_2)\, e_1 - f(e_1)\, e_2$. Pour tout réel t, posons

$$\operatorname{sgn}(t) := \begin{cases} +1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ -1 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Alors il est clair que $\sigma(\mathcal{G}) = \operatorname{sgn}(i\, \overline{\alpha}\, b(v, v))$. Comme e_1 et e_2 sont orthogonaux, on a

$$\begin{aligned} i\, \overline{\alpha}\, b(v, v) &= |f(e_2)|^2\, i\, \overline{\alpha}\, b(e_1, e_1) + |f(e_1)|^2\, i\, \overline{\alpha}\, b(e_2, e_2) \\ &= \left|\frac{1 - \lambda_2}{\overline{\alpha}}\right|^2 i\, \overline{\alpha}\, \frac{1 - \lambda_1}{\overline{\alpha}} + \left|\frac{1 - \lambda_1}{\overline{\alpha}}\right|^2 i\, \overline{\alpha}\, \frac{1 - \lambda_2}{\overline{\alpha}} \\ &= i\, |\overline{\alpha}|^{-2}\, (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)(2 - \overline{\lambda_1} - \overline{\lambda_2}) \end{aligned}$$

Si z est un nombre imaginaire pur, on a évidemment $\operatorname{sgn}(iz) = -\operatorname{sgn}(\mathfrak{I}z)$. Remarquant en outre que $|\overline{\alpha}|^{-2} > 0$, on en déduit

$$\begin{aligned} \sigma(\mathcal{G}) &= -\operatorname{sgn}\big(\mathfrak{I}\big((1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)(2 - \overline{\lambda_1} - \overline{\lambda_2})\big)\big) \\ &= -\operatorname{sgn}\big(\mathfrak{I}\big(-2\lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\lambda_1\lambda_2 + \underline{2 - \overline{\lambda_1} + 1 + \lambda_2\overline{\lambda_1} - \lambda_2 - \overline{\lambda_2} + 1 + \lambda_1\overline{\lambda_2} - \lambda_1}\big)\big). \end{aligned}$$

Comme la partie soulignée est visiblement réelle et que $\mathfrak{I}$ est $\mathbb{R}$-linéaire, on en tire

$$\begin{aligned}\sigma(\mathcal{G}) &= -\mathrm{sgn}(\mathfrak{I}(-2\lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\lambda_1\lambda_2)) \\ &= +\mathrm{sgn}(\mathfrak{I}(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1\lambda_2)) \\ &= \quad \mathrm{sgn}(\mathfrak{I}\lambda_1 + \mathfrak{I}\lambda_2 - \mathfrak{I}\lambda)\end{aligned}$$

qui est le résultat demandé.

III 12) Montrons d'abord que si (V, β) est un espace sesquilinéaire symétrique, on a

$$(*) \qquad \sigma(V, \beta) \equiv \dim V - \dim V^{\perp} \pmod 2.$$

En effet, si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_d)$ est une base semi-orthonormée de V, alors (d'après les calculs de II 1 b)) $\dim V - \dim V^{\perp}$ est le rang de la matrice de β dans la base $\mathcal{B}$; comme celle-ci est diagonale à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$, il est clair que ce rang est congru modulo 2 à la somme des coefficients diagonaux, c'est-à-dire à $\sigma(V, \beta)$, d'où la formule.

Soit maintenant $\mathcal{E}$ comme dans l'énoncé ; soient e le vecteur centre de $\mathcal{E}$ et $F = \ker f$. On rappelle que $F^{\perp} = \mathbb{C}e$ d'après III 3). Montrons l'équivalence « $\lambda = 1 \Leftrightarrow \sigma - n \in 2\mathbb{Z}$ » en distinguant trois cas :

(i) $\mathcal{E}$ est de type T0 : alors $\lambda = 1$ et $\sigma = s = \sigma(F, i\,\overline{\alpha}\,b) = \sigma(E, i\,\overline{\alpha}\,b)$ puisque $F = E$: c'est bien un entier. De plus, tout comme b, $i\,\overline{\alpha}\,b$ est non dégénérée de sorte que, d'après $(*)$, on a $\sigma \equiv n \pmod 2$, cqfd.

(ii) $\lambda = 1$ et $\mathcal{E}$ est de type T1 : alors on a encore $\sigma = s = \sigma(F, i\,\overline{\alpha}\,b)$; d'autre part $\dim F = n - 1$ et $e \in F$, donc $F^{\perp} = \mathbb{C}e \subset F$. L'orthogonal de F dans lui-même pour la forme $i\,\overline{\alpha}\,b$ est $F \cap F^{\perp} = \mathbb{C}e$ qui est de dimension 1, donc $(*)$ donne $\sigma \equiv n - 1 - 1 \equiv n \pmod 2$, cqfd.

(iii) $\lambda \neq 1$: alors b (et donc $i\,\overline{\alpha}\,b$) est non dégénérée sur F d'après III 9), donc $(*)$ implique

$$s \equiv n - 1 \pmod 2.$$

Vu la définition de σ, on en tire

$$\sigma - n \in (-\frac{\mathrm{Arg}\lambda}{\pi} + 2\mathbb{Z})$$

donc $\sigma - n \notin 2\mathbb{Z}$ puisque $\mathrm{Arg}\,\lambda \in]0, 2\pi[$, cqfd.

Remarquons que la relation $\sigma - n \in (-\frac{\mathrm{Arg}\lambda}{\pi} + 2\mathbb{Z})$, vue dans le cas (iii), est trivialement vraie dans les deux autres puisqu'alors $\mathrm{Arg}\,\lambda = 0$ et $\sigma - n \in 2\mathbb{Z}$. Cette formule implique immédiatement que

$$e^{i\,\pi\,(n-\sigma)} = e^{i\,\mathrm{Arg}\,\lambda} = \lambda.$$

Montrons enfin la dernière formule. Si $\sigma - n \in 2\mathbb{Z}$ on a $\lambda = 1$ donc $s = \sigma$. Sinon, comme on sait déjà que $s - n - 1 \in 2\mathbb{Z}$, l'égalité $s = n + 1 + 2[\frac{\sigma - n}{2}]$ équivaut aux inégalités $s - n - 1 \leq \sigma - n < s - n + 1$, c'est-à-dire à $s - 1 \leq \sigma < s + 1$ qui résulte de la définition de σ et du fait que $\mathrm{Arg}\lambda \in]0, 2\pi[$ puisque $\lambda \neq 1$.

III 13) On a $\beta = \operatorname{Arg}\lambda_1$ et $\gamma = \operatorname{Arg}\lambda_2$. Rappelons que $\lambda = \lambda_1\,\lambda_2$, donc

$$\operatorname{Arg}\lambda = \begin{cases} \beta+\gamma & \text{si } k=1 \\ \beta+\gamma-2\pi & \text{si } k \in \{2,3\}. \end{cases}$$

Posons :

$$\Delta := \sigma(\mathcal{E}) - \sigma(\mathcal{E}_1) - \sigma(\mathcal{E}_2) - (ps(\mathcal{E}) - ps(\mathcal{E}_1) - ps(\mathcal{E}_2)).$$

Distinguons plusieurs cas :

(i) $\beta = \gamma = 0$: alors $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 1$, $k = 1$, et $\sigma = ps$ pour les trois espaces considérés donc $\Delta = 0$.

(ii) $\beta = 0 < \gamma$: alors $\lambda_1 = 1$, $\lambda = \lambda_2 \neq 1$, $k = 1$ (puisque $\beta = 0$ et $\gamma < 2\pi$) ; on a donc

$$\sigma(\mathcal{E}) - ps(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E}_2) - ps(\mathcal{E}_2) = 1 - \frac{\operatorname{Arg}\lambda_2}{\pi}$$
$$\sigma(\mathcal{E}_1) - ps(\mathcal{E}_1) = 0$$

d'où encore $\Delta = 0$.

(iii) $\gamma = 0 < \beta$: on trouve $k = 1$ et $\Delta = 0$ par le même argument qu'en (ii).

(iv) $\beta > 0$ et $\gamma > 0$:

(iv)(a) $\beta + \gamma < 2\pi$: alors $k = 1$ et $\operatorname{Arg}\lambda = \beta + \gamma$. Les trois poids sont $\neq 1$ d'où

$$\Delta = -1 - \frac{\operatorname{Arg}\lambda}{\pi} + \frac{\operatorname{Arg}\lambda_1}{\pi} + \frac{\operatorname{Arg}\lambda_2}{\pi} = -1 - \frac{\beta+\gamma}{\pi} + \frac{\beta}{\pi} + \frac{\gamma}{\pi} = -1.$$

(iv)(b) $\beta + \gamma = 2\pi$: alors $k = 2$, $\lambda = 1$, $\sigma(\mathcal{E}) = ps(\mathcal{E})$ et

$$\Delta = -(1 - \frac{\beta}{\pi}) - (1 - \frac{\gamma}{\pi}) = -2 + \frac{\beta+\gamma}{\pi} = 0.$$

(iv)(c) $2\pi < \beta + \gamma < 4\pi$: alors $k = 3$, $\operatorname{Arg}\lambda = \beta + \gamma - 2\pi$, les trois poids sont $\neq 1$, et

$$\Delta = -1 - \frac{\beta+\gamma-2\pi}{\pi} + \frac{\beta}{\pi} + \frac{\gamma}{\pi} = -1 + 2 = +1.$$

En conclusion :

$$\sigma(\mathcal{E}) - \sigma(\mathcal{E}_1) - \sigma(\mathcal{E}_2) - (ps(\mathcal{E}) - ps(\mathcal{E}_1) - ps(\mathcal{E}_2)) = \begin{cases} 0 & \text{si } \beta \text{ ou } \gamma \text{ est nul} \\ k-2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrons maintenant que $\sigma(\mathcal{E}) - \sigma(\mathcal{E}_1) - \sigma(\mathcal{E}_2) = 0$.

Supposons d'abord que β (resp. γ) est nul. Alors il s'agit de voir que $ps(\mathcal{E}) - ps(\mathcal{E}_1) - ps(\mathcal{E}_2) = 0$ d'après le calcul de Δ, ou encore, d'après III 11 c), que $\Im\lambda = \Im\lambda_1 + \Im\lambda_2$ ce qui est clair puisque $\lambda_1 = 1$ (resp. $\lambda_2 = 1$) et $\lambda = \lambda_2$ (resp. $\lambda = \lambda_1$).

Supposons $\beta\gamma \neq 0$. On a les équivalences :

$$\begin{array}{lll} \sigma(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E}_1) + \sigma(\mathcal{E}_2) & & \\ \quad \Leftrightarrow & -(ps(\mathcal{E}) - ps(\mathcal{E}_1) - ps(\mathcal{E}_2)) = k - 2 & \text{(d'après le calcul de } \Delta) \\ \quad \Leftrightarrow & \operatorname{sgn} \Im(\lambda - \lambda_1 - \lambda_2) = k - 2 & \text{(d'après III 11 c))} \\ \quad \Leftrightarrow & \operatorname{sgn} \Im(\lambda - \lambda_1 - \lambda_2) = \operatorname{sgn}(\beta + \gamma - 2\pi) & \text{(définition de } k) \\ \quad \Leftrightarrow & \operatorname{sgn} \Im((\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1) - 1) = \operatorname{sgn}(\beta + \gamma - 2\pi) & \text{(car } \lambda = \lambda_1 \lambda_2) \\ \quad \Leftrightarrow & \operatorname{sgn} \Im((\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1)) = \operatorname{sgn}(\beta + \gamma - 2\pi) & \text{(car } \Im(-1) = 0). \end{array}$$

Or on a $\lambda_1 - 1 = e^{i\,\beta} - 1 = e^{i\beta/2}\,(e^{i\beta/2} - e^{-i\beta/2}) = 2\,i\,\sin(\beta/2)\,e^{i\beta/2} = 2\,\sin(\beta/2)\,e^{i(\beta+\pi)/2}$. Comme $\beta \in]0, 2\pi[$, le sinus est > 0 ; le même calcul pour $\lambda_2 - 1$ implique donc que

$$\operatorname{sgn} \Im((\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1)) = \operatorname{sgn} \Im e^{i(\pi + \frac{\beta+\gamma}{2})} = -\operatorname{sgn}(\sin \frac{\beta + \gamma}{2})$$

qui est bien égal à $\operatorname{sgn}(\frac{\beta+\gamma}{2} - \pi) = \operatorname{sgn}(\beta + \gamma - 2\pi)$ d'après les vertus bien connues de la fonction sinus et le fait que $0 < (\beta + \gamma)/2 < 2\pi$.

Soient maintenant $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ comme en III 6), de poids respectifs λ et λ'. Soit $\mathcal{E}'' = \mathcal{E} \times \mathcal{E}'$, de poids $\lambda'' = \lambda\,\lambda'$, et calculons $\sigma(\mathcal{E}'')$ (on reprend les notations de III 6)).

Si $\mathcal{E}$ est de type T0, on a vu en III 10) que $ps(\mathcal{E}'') = ps(\mathcal{E}) + ps(\mathcal{E}')$. D'autre part on a $\lambda = 1$ donc $\lambda'' = \lambda'$ et $\sigma(\mathcal{E}) = ps(\mathcal{E})$. Si $\lambda' = 1$ alors $\sigma(\mathcal{E}'') = ps(\mathcal{E}'') = ps(\mathcal{E}) + ps(\mathcal{E}') = \sigma(\mathcal{E}) + \sigma(\mathcal{E}')$. Sinon, on a

$$\begin{aligned} \sigma(\mathcal{E}'') &= ps(\mathcal{E}'') + 1 - \frac{\operatorname{Arg} \lambda''}{\pi} \\ &= ps(\mathcal{E}) + ps(\mathcal{E}') + 1 - \frac{\operatorname{Arg} \lambda'}{\pi} \\ &= \sigma(\mathcal{E}) + \sigma(\mathcal{E}'). \end{aligned}$$

Le raisonnement est similaire si $\mathcal{E}'$ est de type T0.

Si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont de type T1, alors E'' est somme directe des sous-espaces $E_1 = E \times \{0\}$ et $E_2 = \{0\} \times E'$; la forme f'' n'est nulle sur aucun d'eux, et E_2 est l'orthogonal à droite de E_1. On est donc dans la situation de III 11), avec $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ isomorphes respectivement à $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$, et ce qui précède montre donc que $\sigma(\mathcal{E}'') = \sigma(\mathcal{E}) + \sigma(\mathcal{E}')$, cqfd.

III 14) Montrons d'abord que si $\mathcal{E} = (E, b, f)$ est un espace α-SQ de dimension n, sa signature σ vérifie $|\sigma| \leq n$. En effet, il est clair que la signature d'un *espace sesquilinéaire symétrique* est majorée en valeur absolue par sa dimension. Si $\mathcal{E}$ est de poids 1, alors $\sigma = ps(\mathcal{E})$ qui est la signature d'un espace sesquilinéaire symétrique de dimension n, d'où la conclusion. Si le poids est $\neq 1$, alors $ps(\mathcal{E})$ est la signature d'un espace sesquilinéaire symétrique de dimension $n-1$, d'où $|ps(\mathcal{E})| \leq n-1$. Mais d'autre part on a déjà remarqué en III 12) que $|\sigma - ps(\mathcal{E})| \leq 1$, d'où le résultat.

Soit $\sigma \in [-1, 1]$ et cherchons $\mathcal{E} = (\mathbb{C}, b, f)$ de signature σ. Distinguons deux cas :

(i) $\sigma = \pm 1$. On sait d'après II 5 c) qu'il existe un espace ε-symétrique $(\mathbb{C}, b)$, avec b non nulle donc non dégénérée. Alors, $(\mathbb{C}, b, 0)$ est bien un espace α-SQ de poids 1 et donc de signature $\sigma' \in \{\pm 1\}$. Si $\sigma' = \sigma$ on a gagné, sinon $(\mathbb{C}, -b, 0)$ convient.

(ii) $|\sigma| < 1$. Alors la formule $\sigma = 1 - \frac{\operatorname{Arg}\lambda}{\pi}$ détermine un unique nombre complexe λ de module 1, qui est en outre $\neq 1$. On sait d'après III 4) qu'il existe un unique espace α-SQ de la forme $(\mathbb{C}, b, \mathrm{Id})$ et de poids λ, donc de signature σ.

Il reste à voir que si n est un entier et si σ est un réel vérifiant $|\sigma| \leq n$, il existe un espace α-SQ de dimension n et de signature σ. D'abord l'inégalité $|\sigma| \leq n$ implique que $n \geq 0$. Si $n = 0$ alors $\sigma = 0$ et l'espace nul convient. Le cas $n = 1$ a été traité ci-dessus. Si $n > 1$, on a $|\sigma/n| \leq 1$ donc il existe $\mathcal{E}$ de dimension 1 et de signature σ/n ; le produit orthogonal $\mathcal{E}^n$ de n copies de $\mathcal{E}$, défini inductivement par $\mathcal{E}^n = \mathcal{E}^{n-1} \times \mathcal{E}$, répond à la question.

III 15) La partie « seulement si » est évidente.

Soient $\mathcal{E} = (E, b, f)$ et $\mathcal{E}' = (E', b', f')$ ayant même dimension n, même type et même signature σ. Il résulte alors de III 12) qu'ils ont aussi même poids λ et même pseudo-signature s. Distinguons suivant le type :

(i) $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont de type T0 : alors (E, b) et (E', b') sont des espaces sesquilinéaires ε-symétriques, et $\sigma = s$ est la signature commune des espaces sesquilinéaires symétriques $(E, i\,\overline{\alpha}\,b)$ et $(E', i\,\overline{\alpha}\,b')$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base semi-orthonormée de $(E, i\,\overline{\alpha}\,b)$. Avec les notations de I 4), on a $\dim(E_+) - \dim(E_-) = \sigma$, mais aussi, puisque $i\,\overline{\alpha}\,b$ est non dégénérée, $\dim(E_+) + \dim(E_-) = n$. Il en résulte que $n_+ = \dim(E_+)$ et $n_- = \dim(E_-)$ sont déterminés par n et σ. Quitte à réordonner la base $\mathcal{B}$, la matrice de $i\,\overline{\alpha}\,b$ dans cette base est $\begin{pmatrix} \mathrm{I}_{n_+} & 0 \\ 0 & -\mathrm{I}_{n_-} \end{pmatrix}$. On a naturellement la même conclusion dans $\mathcal{E}'$ de sorte que les espaces sesquilinéaires symétriques $(E, i\,\overline{\alpha}\,b)$ et $(E', i\,\overline{\alpha}\,b')$ sont isomorphes. Mais si φ est un isomorphisme de $(E, i\,\overline{\alpha}\,b)$ sur $(E', i\,\overline{\alpha}\,b')$, c'est évidemment un isomorphisme de $(E, b, 0)$ sur $(E', b', 0)$, cqfd.

(ii) $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont de type T1 : on procède par récurrence sur n, qui est automatiquement > 0 puisque $f \neq 0$. Le cas $n = 1$ a été traité en II 4). On suppose donc que $n \geq 2$, et que deux espaces α-SQ quelconques ayant même dimension $< n$, même type [T1] et même signature sont isomorphes. (On peut oublier la restriction « T1 » puisque le type T0 a été traité ci-dessus).

Soient e le vecteur centre de $\mathcal{E}$ et F l'hyperplan $\ker f$; on rappelle que $F^{\perp} = \mathbb{C}e$ d'après III 3). Distinguons encore deux cas :

(ii)(a) $\lambda \neq 1$: alors b est non dégénérée sur F d'après III 9) et l'on est dans la situation de III 7) de sorte que (avec les notations de *loc. cit.*) $\mathcal{E}$ est isomorphe au produit orthogonal $\mathcal{F} \times \mathcal{F}^{\perp}$. De plus $\mathcal{F}$ est, par construction, de dimension $n - 1$ et de type T0 et sa signature est donc égale à sa pseudo-signature, qui n'est autre que s. Il en résulte que $\mathcal{F}^{\perp}$ (qui est de dimension 1) est de signature $\sigma - s$, et il est de type T1 puisque $f(e) \neq 0$.

En conclusion, $\mathcal{E}$ est isomorphe au produit orthogonal $\mathcal{F} \times \mathcal{F}^{\perp}$ où les types, dimensions et signatures de $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{F}^{\perp}$ sont déterminés par ceux de $\mathcal{E}$. Comme les dimensions sont $< n$ on déduit de l'hypothèse de récurrence que $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}^{\perp}$ et donc aussi $\mathcal{E}$ sont déterminés à isomorphisme près par ces données, cqfd.

(ii)(b) $\lambda = 1$: alors $0 \neq e \in F$. Pour tout $x \in E$, on a $b(e, x) = \varepsilon\,\overline{f(x)}$; ceci montre que $e \in {}^{\perp}F$ d'où ${}^{\perp}F = \mathbb{C}e$ par raison de dimension.

Choisissons un élément x dans $E\backslash F$, et soit $G = \mathbb{C}e \oplus \mathbb{C}x \subset E$. On a $b(x,e) = f(x) \neq 0$ d'où aussi $b(e,x) = \varepsilon \overline{f(x)} \neq 0$. La matrice de b dans la base (e,x) de G est donc de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \neq 0 \\ \neq 0 & b(x,x) \end{pmatrix}$ de sorte que b est non dégénérée sur G et que $E = G \oplus G^{\perp}$. D'après III 7), $\mathcal{E}$ est isomorphe, avec des notations évidentes, au produit orthogonal $\mathcal{G} \times \mathcal{G}^{\perp}$.

Le vecteur centre de $\mathcal{G}$ est évidemment e, de sorte que $\mathcal{G}$ est de poids 1. Il est clairement de dimension 2, et de type T1 puisque $f(x) \neq 0$. La classe d'isomorphie de $\mathcal{G}$ est donc indépendante de $\mathcal{E}$, d'après III 5 c).

Quant à $\mathcal{G}^{\perp}$, il est de dimension $n-2$ et sa signature est $\sigma - \sigma(\mathcal{G})$, qui ne dépend que de σ (en fait les calculs de III 5) montrent que $\sigma(\mathcal{G}) = 0$ donc $\sigma(\mathcal{G}^{\perp}) = \sigma$). Enfin l'inclusion ${}^{\perp}F = \mathbb{C}e \subset G$ entraîne, en prenant les orthogonaux à droite, que $G^{\perp} \subset F = \ker f$, donc $G^{\perp}$ est de type T0. D'après le cas (i), sa classe d'isomorphie ne dépend donc que de n et σ.

On conclut comme plus haut que $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont isomorphes.

IV Le cas des corps finis

[**Commentaires :** seules les questions 1) et 2) ont été parfois abordées.

L'assertion du début de l'énoncé selon laquelle la partie IV « peut être traitée indépendamment » semble quelque peu à nuancer : on comprend mieux les notions de vecteur centre et de produit orthogonal après avoir résolu les questions 1) à 8) de la partie III.]

IV 1) La relation $f(e) = 1$ résulte de la définition du poids, et l'on a $f(e) = b(e,e)$ par définition de e.

En particulier, on a $e \neq 0$; pour $\mathcal{E} = (E,b,f)$ de dimension 1 et de poids -1, on en déduit que $\{e\}$ est une base de E, et que pour tous t et t' dans $\mathbb{F}_p$ on a $f(te) = t$ et $b(te, t'e) = tt'$. En d'autres termes l'application

$$\begin{array}{rcl} (\mathbb{F}_p, b_0, \mathrm{Id}) & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ t & \longmapsto & te \end{array}$$

est un isomorphisme, où b_0 est définie par $b_0(t,t') = tt'$. Ceci montre que deux espaces SQ de dimension 1 et de poids -1 sont isomorphes. Pour l'existence, il suffit de vérifier que $(\mathbb{F}_p, b_0, \mathrm{Id})$ est bien un espace SQ de poids -1, ce qui résulte d'un calcul immédiat (qui montre aussi que le vecteur centre de $(\mathbb{F}_p, b_0, \mathrm{Id})$ est 1).

IV 2) Si b vérifie les conditions de l'énoncé, on a pour $i > j$:

$$\begin{aligned} b(e_i, e_j) &= -b(e_j, e_i) + 2\, f(e_i)\, f(e_j) && \text{par (SQ)} \\ &= 0 + 2 \times 1 \times 1 && \text{(2 premières conditions)} \\ &= 2 \end{aligned}$$

ce qui montre l'unicité de b : la matrice de b dans la base canonique de E_n est triangulaire inférieure, avec tous ses coefficients diagonaux (resp. au-dessous de la diagonale) égaux à 1 (resp. à 2).

Pour l'existence, il s'agit de voir que si l'on définit b par la matrice ci-dessus, alors (E_n, b, f) est bien un espace SQ. Comme la matrice est clairement inversible, b est bien non dégénérée ; les deux premières relations de l'énoncé sont vérifiées par construction, et il reste à vérifier (SQ). Par bilinéarité, il suffit de le faire lorsque x et y sont des vecteurs de la base canonique, c'est-à-dire :

$$(\,?)\quad \forall(i,j),\ b(e_i,e_j)+b(e_j,e_i)=2\,f(e_i)\,f(e_j)$$

ce qui est vrai pour $i>j$ par construction et donc pour $i<j$ par symétrie ; enfin, pour $i=j$, $(\,?)$ s'écrit $1+1=2$, cqfd.

IV 3) Pour s'y retrouver, on notera $\mathcal{E}_k=(E_k,b_k,f_k)$ pour tout $k\in\mathbb{N}$. Notons $\varphi=\varphi_{n,m}$: $E_n\times E_m\to E_{n+m}$ l'isomorphisme de $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels donné par

$$\varphi_{n,m}((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_m)):=(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m).$$

Vérifions que φ est bien un isomorphisme de $\mathcal{E}_n\times\mathcal{E}_m$ sur $\mathcal{E}_{n+m}$: il s'agit de montrer les relations (pour $x,y\in E_n$ et $x',y'\in E_m$) :

$$\begin{aligned} f_{n+m}(\varphi(x,x')) &= f_n(x)+f_m(x') \\ b_{n+m}(\varphi(x,0),\varphi(y,0)) &= b_n(x,y) \\ b_{n+m}(\varphi(0,x'),\varphi(0,y')) &= b_m(x',y') \\ b_{n+m}(\varphi(x,0),\varphi(0,y')) &= 0. \end{aligned}$$

La première est immédiate ; par bilinéarité, il suffit de vérifier les trois autres lorsque x,y,x',y' sont des vecteurs des bases canoniques de E_n et E_m, ce qui est encore immédiat sur les définitions (pour la quatrième, on remarque que dans ce cas $\varphi(x,0)$ est « avant » $\varphi(0,y')$ dans la base canonique de E_{n+m}).

Si $\mathcal{E}=(E,b,f)$ et $\mathcal{E}'=(E',b',f')$ sont deux espaces SQ, de groupes d'automorphismes respectifs G et G', on a un morphisme injectif naturel

$$\mathrm{GL}\,(E)\times\mathrm{GL}\,(E')\longrightarrow\mathrm{GL}\,(E\times E')$$

envoyant (u,u') sur $u\times u'$ défini par $(u\times u')(x,x')=(u(x),u'(x'))$. Il est immédiat que ce morphisme envoie $G\times G'$ dans le groupe d'automorphismes de $\mathcal{E}\times\mathcal{E}'$.

En particulier on obtient un morphisme injectif naturel de $G_n\times G_m$ dans le groupe des automorphismes de $\mathcal{E}_n\times\mathcal{E}_m$, lequel est isomorphe à G_{n+m} d'après ce qui précède.

Explicitement, convenons d'identifier, pour $h\le k$, E_h à un sous-espace de E_k par l'isomorphisme $x\mapsto\varphi_{h,k-h}(x,0)$ (ceci est suggéré par l'énoncé, qui utilise sans vergogne la même notation pour les vecteurs de base de E_h et E_k). L'isomorphisme $\varphi_{n,m}$ décrit plus haut s'écrit, avec cette convention :

$$\varphi_{n,m}(x,y)=x+T_n(y).$$

On a alors

$$(g\times g')(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)=g(x_1,\ldots,x_n)+T_n(g'(y_1,\ldots,y_m)).$$

Calculons en particulier $(g \times g')(e_i)$. Si $i \leq n$ on a simplement $(g \times g')(e_i) = g(e_i)$. Si $i > n$, alors $e_i = T_n(e_{i-n})$ d'où $(g \times g')(e_i) = T_n(g'(e_{i-n}))$. En résumé on a, pour tout $i \leq n+m$:

$$(g \times g')(e_i) = \begin{cases} g(e_i) & \text{si } i \leq n \\ T_n(g'(e_{i-n})) & \text{si } i > n. \end{cases}$$

En d'autres termes, si l'on identifie un endomorphisme de E_h ($h \in \mathbb{N}$) à sa matrice dans la base canonique, $g \times g'$ est simplement la matrice $\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g' \end{pmatrix}$. Ceci rend évidente la formule $(g \times g') \times g'' = g \times (g' \times g'')$, les deux membres ayant pour matrice $\begin{pmatrix} g & 0 & 0 \\ 0 & g' & 0 \\ 0 & 0 & g'' \end{pmatrix}$.

IV 4) Montrons par récurrence sur n que $\mathcal{E}_n$ est de poids $(-1)^n$ et que son vecteur centre est

$$e[n] := (1, -1, 1, \ldots, (-1)^{n-1}).$$

C'est immédiat pour $n = 1$. Supposons que $n > 1$ et que $\mathcal{E}_{n-1}$ est de poids $(-1)^{n-1}$ et de vecteur centre $e[n-1]$. Alors d'après le calcul du poids et du vecteur centre d'un produit orthogonal fait dans III 8) (et encore valable ici), $\mathcal{E}_{n-1} \times \mathcal{E}_1$ a pour poids $(-1)^n$ et pour vecteur centre $(e[n-1], (-1)^{n-1}\, e[1])$. Or l'isomorphisme $\varphi_{n-1,1} : \mathcal{E}_{n-1} \times \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_n$ envoie $(e[n-1], (-1)^{n-1}\, e[1])$ sur $e[n]$ qui est donc bien le vecteur centre de $\mathcal{E}_n$, dont le poids est aussi celui de $\mathcal{E}_{n-1} \times \mathcal{E}_1$, c'est-à-dire $(-1)^n$, cqfd.

Autre méthode : pour voir que $e[n]$ (trouvé par tâtonnements, par exemple) est bien le vecteur centre il suffit de voir que $b(e_i, e[n]) = 1$ pour tout i, ce qui est un calcul facile :

$$\begin{aligned} b(e_i, e[n]) &= b(e_i, \textstyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} e_j) && \text{(définition de } e[n]) \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1}\, b(e_i, e_j) && \text{(bilinéarité)} \\ &= 2 \textstyle\sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{j-1} + (-1)^{i+1} && \text{(définition et calcul de } b(e_i, e_j)) \\ &= \begin{cases} 0 + (-1)^{i+1} & (i \text{ impair}) \\ 2 + (-1)^{i+1} & (i \text{ pair}) \end{cases} \\ &= 1, && \text{cqfd.} \end{aligned}$$

IV 5) Soit $\tau \in G_2$ envoyant e_1 sur e_2. Alors τ (comme tout élément de G_2) fixe le vecteur centre de E_2 qui est $e_1 - e_2$. Donc $e_1 - e_2 = \tau(e_1 - e_2) = \tau(e_1) - \tau(e_2) = e_2 - \tau(e_2)$, d'où $\tau(e_2) = -e_1 + 2\, e_2$ comme annoncé. Ceci montre que la matrice de τ dans la base canonique est $A := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, d'où aussi l'unicité de τ.

Réciproquement, définissons τ comme l'endomorphisme de E_2 de matrice A : on a bien $\tau(e_1) = e_2$, et τ est un automorphisme de E_2 puisque $\det A = 1$. Il reste à voir que τ respecte f et b. L'égalité $f \circ \tau = f$ est immédiate ; d'autre part le fait que τ respecte b équivaut à la formule ${}^t A\, M\, A = M$ (où $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice de b), qui se vérifie trivialement.

IV 6) La description matricielle de $g \times g' \times g''$ dans IV 3) montre en particulier que l'on a

$$\begin{aligned} \tau_i(e_i) &= e_{i+1} \\ \tau_i(e_{i+1}) &= -e_i + 2\, e_{i+1} \\ \tau_i(e_j) &= e_j \quad \text{ si } j < i \text{ ou } j > i+1. \end{aligned}$$

La troisième relation ci-dessus implique immédiatement que τ_i et τ_j commutent si $|i-j| > 1$. La deuxième formule de l'énoncé peut s'écrire $\tau_i\, \tau_{i+1}\, \tau_i = \tau_{i+1}\, \tau_i\, \tau_{i+1}$ $(0 < i < n-1)$. Il est clair que les deux membres fixent e_l pour tout $l \not\in \{i, i+1, i+2\}$, et laissent stable le sous-espace V de E_n de base (e_i, e_{i+1}, e_{i+2}). Un calcul immédiat montre que les restrictions à V de $\tau_i\, \tau_{i+1}\, \tau_i$ et de $\tau_{i+1}\, \tau_i\, \tau_{i+1}$ ont toutes deux pour matrice, dans la base en question, la matrice

$$B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

et sont donc égales, d'où finalement, en identifiant B à l'élément correspondant de G_3 :

$$\tau_i\, \tau_{i+1}\, \tau_i = \tau_{i+1}\, \tau_i\, \tau_{i+1} = 1_{i-1} \times B \times 1_{n-i-2}.$$

IV 7) a) Par définition, Γ_2 est engendré par $\tau = \tau_1$, donc s'identifie au sous-groupe de $\mathrm{GL}\,(2, \mathbb{F}_p)$ engendré par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ calculée en IV 5). On en tire immédiatement la formule

$$\tau(x) = x - f(x)\, e$$

pour tout $x \in E_2$, où $e = e[2] = (1, -1)$. Vu que $f(e) = 0$, on en déduit :

$$\forall x \in E_2,\ \forall k \in \mathbb{Z}, \quad \tau^k(x) = x - k\, f(x)\, e$$

qui implique que τ est d'ordre p dans G_2 puisque le corps de base est de caractéristique p. En conclusion, Γ_2 est cyclique d'ordre p.

b) La formule $\tau(x) = x - f(x)\, e$ vue ci-dessus montre que $\tau(x) = x$ si et seulement si $f(x) = 0$, d'où le résultat puisque $\ker f = \mathbb{F}_p\, e$ et que τ engendre Γ_2.

c) Pour tout $t \in \mathbb{F}_p$, $\{t\, e\}$ est l'orbite de $t\, e$ sous Γ_2. Si $x \in E_2$ n'est pas colinéaire à e, alors $f(x) \neq 0$, de sorte que la formule $\tau^k(x) = x - k\, f(x)\, e$ vue en a) montre que l'orbite de x est la droite affine $x + \mathbb{F}_p\, e$. En résumé on a, pour tout $x \in E_2$:

$$\Gamma_2\, x = \begin{cases} \{x\} & \text{si } x \in \mathbb{F}_p\, e \\ x + \mathbb{F}_p\, e & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme $\mathbb{F}_p\, e = \ker f$, ceci peut aussi s'écrire :

$$\Gamma_2\, x = \begin{cases} \{x\} & \text{si } f(x) = 0 \\ f^{-1}(f(x)) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrons que les orbites sous G_2 sont les mêmes. Si $g \in G_2$, alors g fixe e donc on a bien $G_2\, x = \{x\}$ si $x \in \mathbb{F}_p\, e$. D'autre part, on a $f \circ g = f$ donc, pour tout $t \in \mathbb{F}_p$, g respecte la droite affine $f^{-1}(t)$. Par suite, si $x \notin \mathbb{F}_p\, e$ on a $G_2\, x \subset f^{-1}(f(x)) = \Gamma_2\, x$, d'où évidemment égalité puisque $\Gamma_2 \subset G_2$.

d) On a $\Gamma_2 \subset G_2$ par définition. Soit $g \in G_2$: comme on sait que $G_2\, e_1 = \Gamma_2\, e_1$, il existe $\gamma \in \Gamma_2$ tel que $g\, e_1 = \gamma\, e_1$. D'autre part $g\, e = e = \gamma\, e$; comme e et e_1 engendrent E_2 on a donc $g = \gamma$, d'où $g \in \Gamma_2$, cqfd.

IV 8) Procédons par récurrence sur n. Si $n = 2$, le fait que x ne soit pas colinéaire au vecteur centre implique que $f(x) \neq 0$, et, d'après IV 7 c), que l'orbite $\Gamma_2\, x$ contient le vecteur $f(x)\, e_1$, d'où le résultat.

Supposons maintenant que $n \geq 3$, et que l'assertion est démontrée en dimension $< n$.

Remarquons que l'hypothèse sur x, et la valeur de $f(x)$, sont invariantes sous l'action de Γ_n (et même de G_n) : nous pouvons donc toujours remplacer x par un élément de $\Gamma_n\, x$. Si Γ est un sous-groupe de Γ_n, nous noterons $y \overset{\Gamma}{\sim} z$ la relation « y et z sont dans la même orbite sous Γ ».

Notons $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Comme x n'est pas colinéaire au vecteur centre calculé en IV 4), il existe un indice $j < n$ tel que $x_j + x_{j+1} \neq 0$. D'après le cas $n = 2$, on a $(x_j, x_{j+1}) \overset{\Gamma_2}{\sim} (x_j + x_{j+1}, 0)$. Il en résulte que $x \overset{\Gamma}{\sim} x'$ où $\Gamma = 1_{j-1} \times \Gamma_2 \times 1_{n-j-1}$ et où x' a une coordonnée nulle (à savoir la $(j+1)$-ième). Nous sommes donc ramenés au cas où x a une coordonnée nulle. Soit alors j le plus grand indice tel que $x_j = 0$. Si $j < n$, alors $x_{j+1} \neq 0$ de sorte que (à nouveau d'après le cas $n = 2$) l'on a $(x_j, x_{j+1}) = (0, x_{j+1}) \overset{\Gamma_2}{\sim} (x_{j+1}, 0)$; comme ci-dessus on en déduit un élément de $\Gamma_n\, x$ dont la $(j+1)$-ième coordonnée est nulle. En répétant si nécessaire l'argument, on voit que l'on peut supposer que $x_n = 0$, donc que $x \in E_{n-1}$ (identifié à un sous-espace de E_n, comme en IV 3) ; noter que cette identification est compatible avec f). Distinguons alors trois cas :

(i) x n'est pas colinéaire au vecteur centre $e[n-1]$ de $\mathcal{E}_{n-1}$: alors l'hypothèse de récurrence implique que $x \overset{\Gamma_{n-1}}{\sim} f(x)\, e_1$ si $f(x) \neq 0$, et que $x \overset{\Gamma_{n-1}}{\sim} e_1 - e_2$ si $f(x) = 0$, où bien entendu Γ_{n-1} est identifié à $\Gamma_{n-1} \times \{1\} \subset \Gamma_n$; d'où la conclusion.

(ii) $n = 3$, et x est colinéaire à $e[2]$, donc de la forme $(\alpha, -\alpha, 0)$, où α est non nul (puisque x n'est pas colinéaire à $e[3]$). Alors le cas $n = 2$ donne successivement :

$$x = (\alpha, -\alpha, 0) \overset{1\times\Gamma_2}{\sim} (\alpha, 1-\alpha, -1) \overset{\Gamma_2\times 1}{\sim} (1, 0, -1) \overset{1\times\Gamma_2}{\sim} (1, -1, 0) = e_1 - e_2.$$

(iii) $n \geq 4$, et x est colinéaire à $e[n-1]$: alors les 4 dernières coordonnées de x sont $(-\alpha, \alpha, -\alpha, 0)$, avec $\alpha \neq 0$. Soit $\beta \in \mathbb{F}_p$, non nul et différent de α (on rappelle que $p > 2$: on peut prendre par exemple $\beta = -\alpha$). Dans E_3, on a, d'après le cas précédent, $(\alpha, -\alpha, 0) \overset{\Gamma_3}{\sim} e_1 - e_2 \overset{\Gamma_3}{\sim} (\beta, -\beta, 0)$, de sorte que $x \overset{1\times\Gamma_3}{\sim} (\ldots, -\alpha, \beta, -\beta, 0)$ qui n'est pas colinéaire à $e[n-1]$ puisque $\beta \neq \alpha$: on peut donc conclure par le cas (i).

IV 9) Il résulte notamment de IV 8) que

$$\Gamma_n\, e_1 = \Sigma_n.$$

Ceci montre que Γ_n opère transitivement sur Σ_n. De plus il est clair, vu sa définition, que Σ_n est invariant sous G_n ; ce dernier opère donc aussi transitivement sur Σ_n puisqu'il en est ainsi de son sous-groupe Γ_n.

Montrons par récurrence sur $n > 0$ que $G_n = \Gamma_n$. Si $n = 1$, les deux groupes sont triviaux (puisqu'ils fixent le vecteur centre, qui engendre E_1). Si $n = 2$, l'assertion est établie en IV 7 d). Supposons que $n > 2$ et que $G_m = \Gamma_m$ pour tout $m < n$. Soit $g \in G_n$. Alors $g\,e_1 \in \Sigma_n$ donc il existe $\gamma \in \Gamma_n$ tel que $\gamma\,g\,e_1 = e_1$: il suffit de voir que $\gamma\,g \in \Gamma_n$. Or $\gamma\,g$ est dans G_n et fixe e_1 donc laisse stable l'orthogonal à droite de e_1, qui est le sous-espace $T_1(E_{n-1})$ engendré par $e_2, \ldots, e_n$. Ceci implique que $\gamma\,g$ est de la forme $1_1 \times u$ où u est un élément de G_{n-1}, donc de Γ_{n-1} (hypothèse de récurrence). Mais il est clair sur la définition de Γ_n que $\Gamma_s \times \Gamma_t \subset \Gamma_{s+t}$ pour tout couple (s, t) d'entiers naturels. Donc $\gamma\,g = 1_1 \times u \in \Gamma_n$, cqfd.

Calculons enfin le cardinal de Σ_n. L'ensemble $H_n = f^{-1}(1) \subset E_n$ (qui est non vide puisque $n > 0$) est un hyperplan affine de E_n ; il a donc p^{n-1} éléments. Si n est pair, le vecteur centre $e[n]$ est dans le noyau de f (d'après le calcul de $e[n]$), donc $\Sigma_n = H_n$. Si n est impair, alors $f(e[n]) = 1$; le seul vecteur de H_n colinéaire à $e[n]$ est donc $e[n]$, et l'on a finalement

$$|\Sigma_n| = \begin{cases} p^{n-1} & (n \text{ pair}) \\ p^{n-1} - 1 & (n \text{ impair}). \end{cases}$$

IV 10) Montrons que le stabilisateur S de e_n sous G_n est $G_{n-1} \times 1$. L'inclusion $G_{n-1} \times 1 \subset S$ est évidente. Réciproquement, tout élément s de S fixe e_n par définition, et laisse donc stable l'orthogonal à gauche de e_n, lequel n'est autre que E_{n-1}. Donc s est de la forme $u \times 1$ où $u \in G_{n-1}$, cqfd.

En particulier, S est isomorphe à G_{n-1}. Comme $e_n \in \Sigma_n$ (puisque $n > 1$, e_n n'est pas colinéaire au vecteur centre), l'orbite de e_n sous G_n est Σ_n d'après IV 9). Par suite $|\Sigma_n| = |G_n|/|S| = |G_n|/|G_{n-1}|$. Le calcul de $|\Sigma_n|$ fait en IV 9) donne donc, pour tout $n > 1$:

$$|G_n| = \begin{cases} p^{n-1}\,|G_{n-1}| & (n \text{ pair}) \\ (p^{n-1} - 1)\,|G_{n-1}| & (n \text{ impair}). \end{cases}$$

Comme G_1 est trivial on a donc $|G_2| = p$ (ce qu'on savait déjà), $|G_3| = p(p^2 - 1)$, $|G_4| = p(p^2 - 1)p^3$, $|G_5| = p(p^2 - 1)p^3(p^4 - 1)$, et de façon générale :

$$|G_n| = \Big(\prod_{i=0}^{[\frac{n-2}{2}]} p^{2i+1}\Big)\Big(\prod_{i=1}^{[\frac{n-1}{2}]} (p^{2i} - 1)\Big).$$

IV 11) D'après l'étude faite en IV 9), $\Sigma_3 = H \setminus \{e\}$ où H est le plan affine $f^{-1}(1)$ et $e = (1, -1, 1)$ le vecteur centre. Il en résulte que si x et y sont dans Σ_3, la relation $x \equiv y$ équivaut à « les points e, x, y de H sont alignés ». C'est bien une relation d'équivalence dont les classes sont les droites de H passant par e, privées de e. Chacune de ces classes a donc $p - 1$ éléments, et leur nombre est donc $|\Sigma_3|/(p - 1) = p + 1$ (on peut aussi remarquer directement que c'est le cardinal de la droite projective sur $\mathbb{F}_p$).

IV 12) Comme G_3 fixe e et laisse stable le plan H, il opère sur l'ensemble des droites de H passant par e (ou, ce qui revient au même, sur l'ensemble des classes d'équivalence pour $\equiv$). Numérotant celles-ci de 1 à $p+1$, on en déduit un morphisme de groupes $\varphi : G_3 \to \mathfrak{S}_{p+1}$.

Cherchons le noyau de φ. Si $g \in \ker\varphi$, alors g opère sur H par une transformation affine fixant e : elle est donc linéaire si l'on munit H de sa structure d'espace vectoriel d'origine e. De plus elle respecte toutes les droites vectorielles pour cette structure, de sorte que tout élément non nul de H est vecteur propre. Donc $g_{|H}$ est une homothétie de centre e : il existe donc $\lambda \in \mathbb{F}_p$ non nul tel que, pour tout $x \in H$, on ait $g(x) = e + \lambda\,(x-e) = (1-\lambda)\,e + \lambda\,x$. Cette formule détermine g (en fonction de λ) puisque H engendre E_3 comme espace vectoriel. On peut donc en déduire que :

$$\forall\, x \in E_3, \quad g(x) = \lambda\,x + (1-\lambda)\,f(x)\,e$$

puisque les deux membres sont linéaires en x et coïncident pour $x \in H$.

En particulier, g induit la multiplication par λ sur le plan $\ker f$. Comme g induit l'identité sur $\mathbb{F}_p\,e$, qui est un supplémentaire de $\ker f$, on en déduit que $\det g = \lambda^2$. Mais du fait que $\det\tau = 1$ (cf. IV 5)) il résulte que $G_3 \subset \mathrm{SL}\,(3, \mathbb{F}_p)$, d'où $\lambda^2 = 1$ et $\lambda = \pm 1$. (On peut aussi arriver à cette conclusion en écrivant directement que g respecte b).

Si $\lambda = 1$, alors $g = \mathrm{Id}$. Le cas $\lambda = -1$ donne $g(x) = -x + 2\,f(x)\,e$, de sorte que la matrice de g dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Inversement, il est clair par construction que g défini par $g(x) = -x + 2\,f(x)\,e$ respecte e et induit l'homothétie voulue sur H (en particulier, g est inversible). Il reste à vérifier que $g \in G_3$. La relation $f \circ g = f$ est immédiate. Vérifions que g respecte b : pour x et y dans E_3, on a

$$\begin{aligned} b(g(x), g(y)) &= b(-x + 2\,f(x)\,e, -y + 2\,f(y)\,e) \\ &= b(x,y) - 2\,f(y)\,b(x,e) - 2\,f(x)\,b(e,y) + 4\,f(x)\,f(y)\,b(e,e) \end{aligned}$$

(définition de g et bilinéarité de b). Si l'on remplace $b(x,e)$ par $f(x)$ (définition de e), $b(e,e)$ par $f(e) = 1$, et $b(e,y)$ par $f(y)$ (relation (SQ) et définition de e) on trouve bien $b(g(x), g(y)) = b(x,y)$, cqfd.

En conclusion, $\ker\varphi = \{1_3, g\}$ où g est défini ci-dessus.

Montrons que $\varphi(G_3) \subset \mathfrak{A}_{p+1}$: comme G_3 est égal à Γ_3, il est engendré par $1 \times \tau$ et $\tau \times 1$, qui sont d'ordre p d'après les calculs de IV 7 a). Donc $\varphi(G_3)$ est engendré par ses éléments d'ordre impair (on rappelle que $p \neq 2$) donc de signature 1, cqfd.

IV 13) On rappelle (cf. IV 10)) que $|G_3| = p\,(p^2-1)$. Comme $\ker\varphi$ est d'ordre 2, il en résulte que

$$|\varphi(G_3)| = \frac{1}{2}\,p\,(p^2-1) = \begin{cases} 12 & \text{si } p = 3 \\ 60 & \text{si } p = 5. \end{cases}$$

Dans le premier cas, on a $|\varphi(G_3)| = |\mathfrak{A}_4|$, d'où $\varphi(G_3) = \mathfrak{A}_4$ puisque $\varphi(G_3)$ est un sous-groupe de $\mathfrak{A}_4$.

Dans le second cas, $\varphi(G_3)$ est un sous-groupe d'indice 6 de $\mathfrak{A}_6$. On en déduit que $\varphi(G_3) \cong \mathfrak{A}_5$ grâce à la proposition suivante :

Proposition. Soit $n \geq 5$ un entier et soit H un sous-groupe d'indice n de $\mathfrak{A}_n$. Alors H est isomorphe à $\mathfrak{A}_{n-1}$.

Démonstration. Posons $G = \mathfrak{A}_n$ et numérotons les éléments de G/H de 1 à n, le numéro n correspondant à la classe H. L'action à gauche de G sur G/H par translation fournit alors un morphisme de groupes $\psi : G \to \mathfrak{S}_n$, non trivial puisque l'action est transitive. Comme $n \geq 5$, le groupe G est simple donc ψ est injectif et $\psi(G)$ est d'indice 2 dans $\mathfrak{S}_n$ donc égal à $\mathfrak{A}_n$. Ainsi, ψ induit un isomorphisme de G sur $\mathfrak{A}_n$. Par construction, on a $H = \psi^{-1}(H')$ où $H' \subset \mathfrak{A}_n$ est le stabilisateur de n pour l'action naturelle de $\mathfrak{A}_n$ sur $\{1, 2, \ldots, n\}$; donc ψ induit un isomorphisme de H sur H', d'où la conclusion puisqu'il est clair que $H' \cong \mathfrak{A}_{n-1}$.

Remarque : on a montré plus précisément que tout sous-groupe d'indice n de $\mathfrak{A}_n$ est de la forme $u(\mathfrak{A}_{n-1})$, où u est un automorphisme de $\mathfrak{A}_n$ et où $\mathfrak{A}_{n-1}$ est vu comme sous-groupe de $\mathfrak{A}_n$ de la manière habituelle. Dans la situation du problème (avec $p = 5$), l'action de G_3 sur Σ_3 (qui fournit le morphisme $\varphi : G_3 \to \mathfrak{A}_6$) est transitive et en particulier sans point fixe, de sorte que $\varphi(G_3)$ n'est pas conjugué du sous-groupe « standard » $\mathfrak{A}_5 \subset \mathfrak{A}_6$, et que l'automorphisme u n'est pas intérieur.