Université de Rennes 1
Préparation à l'agrégation de mathématiques
Auteur du document :
L. Moret-Bailly

Agrégation de mathématiques
Problème de mathématiques générales 92
Corrigé (Laurent Moret-Bailly, janvier 2002)

Partie I

2 pts **A1 :** T est évidemment linéaire, et si $a, a' \in A$ on a $T(aa') - T(a'a) = T(aa' - a'a) = T([a, a']) = 0$ puisque $[a, a'] \in [A, A]$. Donc T est bien une trace.

4 pts **A2 :** Il est clair que le sous-espace vectoriel $\ker \tau$ de A contient tous les commutateurs de A, donc contient le sous-espace $[A, A]$ qu'ils engendrent. Donc (propriété universelle du quotient) il existe une unique application linéaire $\overline{\tau} : H_0(A) \to V$ telle que $\tau = \overline{\tau} \circ T$, d'où la première assertion.

Considérons maintenant l'application $\varphi : \mathrm{Hom}_k(H_0(A), V) \to \mathrm{Hom}_k(A, V)$ donnée par $u \mapsto u \circ T$. Alors φ est clairement linéaire, et de plus est à valeurs dans $T(A, V)$ (il résulte immédiatement de A1 que $u \circ T$ est une trace pour tout $u : H_0(A) \to V$ linéaire). On a donc une application linéaire $\mathrm{Hom}_k(H_0(A), V) \to T(A, V)$, et la première partie de la question dit précisément qu'elle est bijective. Noter que son inverse n'est autre que l'application « $\tau \mapsto \overline{\tau}$ ».

1 pt **A3(a) :** Notons $T_A : A \to H_0(A)$ et $T_B : B \to H_0(B)$ les traces canoniques (ce que l'énoncé se dispense de faire). On remarque que $T_B \circ f : A \to H_0(B)$ est une trace sur A (immédiat puisque $T_B \circ f(aa') = T_B(f(a)f(a')) = T_B(f(a')f(a)) = T_B \circ f(a'a)$). Il suffit alors d'appliquer A2 à la trace $T_B \circ f$.

1 pt **A3(b) :** Pour $\alpha \in H_0(A)$, classe de $a \in A$, on a $H_0(f)(\alpha) = T_A(u(au^{-1})) = T_A((au^{-1})u) = T_A(a) = \alpha$, d'où l'assertion.

2 pts **B1 :** Il s'agit de voir que $T \circ \mathrm{Tr}(mp) = T \circ \mathrm{Tr}(pm)$ pour m et p dans $M_n(A)$. Les deux membres sont linéaires en m et en p, de sorte qu'il suffit de vérifier la formule lorsque m et p parcourent une famille k-génératrice de $M_n(A)$, par exemple la famille des $E_{ij}(a)$ (i et $j \in \{1, \ldots, n\}$, $a \in A$). Avec la formule donnée dans l'introduction, on trouve $T \circ \mathrm{Tr}(E_{ij}(a)E_{kl}(a')) = T \circ \mathrm{Tr}(\delta_{jk}E_{il}(aa')) = \delta_{jk}\delta_{il}\, T(aa')$ et symétriquement $T \circ \mathrm{Tr}(E_{kl}(a')E_{ij}(a)) = \delta_{il}\delta_{jk}\, T(a'a)$ ce qui est la même chose puisque $T(aa') = T(a'a)$.

(On peut aussi faire un calcul direct, avec $m = (m_{ij})$ et $p = (p_{ij})$ quelconques).

1 pt **B2(a) :** la formule de l'introduction donne immédiatement $[E_{ij}(a), E_{kl}(b)] = \delta_{jk}\, E_{il}(ab) - \delta_{il}\, E_{kj}(ba)$.

1 pt **B2(b) :** $F_i(a) = [E_{i1}(a), E_{1i}(1)]$.

1 pt **B2(c) :** l'« unicité » proclamée par l'énoncé n'a pas de sens. La formule se vérifie directement, par exemple coefficient par coefficient.

3 pts **B2(d) :** il est clair que $M'_n(A)$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(A)$; il reste à voir qu'il est contenu dans $[M_n(A), M_n(A)]$.

Considérons la formule de la question précédente, pour m quelconque. On remarque que les termes $E_{ij}(m_{ij})$ ($i \neq j$) sont des commutateurs : explicitement, $E_{ij}(a) = [E_{ii}(a), E_{ij}(1)]$ par exemple. Il en est de même des $F_i(m_{ii})$ d'après (b).

Donc, $m \in [M_n(A), M_n(A)]$ si et seulement si $E_{11}(\mathrm{Tr}(m)) \in [M_n(A), M_n(A)]$. Supposons maintenant que $m \in M'_n(A)$: alors $\mathrm{Tr}(m) \in [A, A]$. Or l'application linéaire $a \mapsto E_{11}(a) : A \to M_n(A)$ respecte la multiplication donc envoie $[A, A]$ dans $[M_n(A), M_n(A)]$. On a donc bien $E_{11}(\mathrm{Tr}(m)) \in [M_n(A), M_n(A)]$, cqfd.

2 pts **B2(e) :** Comme $T : A \to H_0(A)$ est surjective, et $\mathrm{Tr} : M_n(A) \to A$ aussi (parce que $n \geq 1$!), $T \circ \mathrm{Tr}$ est surjective et donc $\overline{T \circ \mathrm{Tr}}$ l'est aussi. Son noyau est l'image dans $H_0(M_n(A))$ du noyau de $T \circ \mathrm{Tr}$, donc est nul d'après (d), cqfd.

2 pts **C1 :** pour tout $h \in G$, on a

$$(\sum_{g \in G} f(g)\chi_g)(h) = \sum_{g \in G} f(g)\chi_g(h) = f(h),$$

d'où $f = \sum_{g \in G} f(g)\chi_g$. Ceci montre que la famille $\{\chi_g\}$ est génératrice. Montrons qu'elle est libre : soit $(\lambda_g)_{g \in G} \in k^G$ tel que $\sum_{g \in G} \lambda_g \chi_g = 0$. Évaluant en $h \in G$ quelconque, on trouve $\lambda_h = 0$, cqfd.

3 pts **C2 :** on a par définition $(\chi_g \chi_{g'})(l) = \sum_{h \in G} \chi_g(h)\chi_{g'}(h^{-1}l)$; le terme $\chi_g(h)\chi_{g'}(h^{-1}l)$ est nul sauf si $h = g$ et $h^{-1}l = g'$. La somme est donc nulle sauf si $g^{-1}l = g'$ (i.e. $l = gg'$), auquel cas elle vaut 1. En conclusion, on a $\chi_g \chi_{g'} = \chi_{gg'}$.

Il est clair, sur la formule qui le définit, que le produit de convolution est bilinéaire. Il reste à vérifier les propriétés $(ff')f'' = f(f'f'')$ et $f\chi_e = \chi_e f = f$ pour f, f', f'' dans G. Ces formules sont « linéaires en f, f' et f'' » (à cause de la bilinéarité vue ci-dessus) de sorte qu'il suffit de les vérifier lorsque f, f' f'' parcourent un système générateur de $k[G]$, par exemple la base $\{\chi_g\}_{g\in G}$. Les deux formules sont alors immédiates à partir de $\chi_g\chi_{g'} = \chi_{gg'}$, de l'associativité dans G et du fait que e est neutre.

2 pts **C3 :** il est clair que T_C est linéaire. Pour voir que $T_C(ff') = T_C(f'f)$ pour f et f' dans $k[G]$, on remarque encore que les deux membres sont linéaires en f et en f' : il suffit donc de faire la vérification pour $f = \chi_g$ et $f' = \chi_{g'}$. Or $T_C(\chi_g\chi_{g'}) = T_C(\chi_{gg'})$ qui vaut 1 si $gg' \in C$ et 0 sinon. Il suffit donc de voir que l'on a l'équivalence $gg' \in C \Leftrightarrow g'g \in C$, ce qui résulte du fait que gg' et $g'g$ sont conjugués ($gg' = g(g'g)g^{-1}$).

1 pt **C4(a) :** si α est une forme linéaire sur $k[G]$, et $f \in G$, on a $\alpha(f) = \alpha(\sum_{g\in G} f(g)\chi_g) = \sum_{g\in G} f(g)\alpha(\chi_g)$, d'où le résultat en posant

$$a(g) = \alpha(\chi_g)$$

(cette formule, et pas seulement l'existence de a demandée par l'énoncé, servira dans (b)).

2 pts **C4(b) :** soit $\tau : k[G] \to k$ une trace. Appliquant le résultat de (a) à la forme linéaire τ, on trouve, en notant Γ l'ensemble des classes de conjugaison de G :

$$\tau(f) = \sum_{g\in G} \tau(\chi_g)\, f(g) = \sum_{C\in\Gamma}\sum_{g\in C} \tau(\chi_g)\, f(g).$$

Il suffit donc, pour conclure, de voir que la fonction $g \mapsto \tau(\chi_g)$ est constante sur chaque classe, c'est-à-dire invariante par conjugaison. Mais puisque τ est une trace on a $\tau(\chi_{hgh^{-1}}) = \tau(\chi_{hg}\chi_{h^{-1}}) = \tau(\chi_{h^{-1}}\chi_{hg}) = \tau(\chi_{h^{-1}hg}) = \tau(\chi_g)$, cqfd.

2 pts **C5 :** la question précédente montre que $\{T_C\}$ engendre $T(k[G], k)$. Montrons qu'elle est libre : si l'on a une relation $\sum_{C\in\Gamma} \lambda_C T_C = 0$ on trouve, en évaluant sur l'élément χ_g de $k[G]$, que $\lambda_{\text{classe de } g} = 0$, donc tous les λ_C sont nuls, cqfd.

D'après A2, l'application $\tau \mapsto \overline{\tau}$ est un isomorphisme de $T(k[G], k)$ sur le dual de $H_0(k[G])$; l'image $\{\overline{T_C}\}$ de $\{T_C\}$ par cet isomorphisme est donc bien une base dudit dual.

2 pts **C6 :** il résulte de la question précédente que, pour G fini quelconque, $H_0(k[G])$ est de dimension finie égale au nombre de classes de conjugaison de G.

Pour $G = S_r$, ce nombre est égal au nombre de types possibles de décompositions en cycles disjoints ; pour S_4 on trouve 5 types (identité, transpositions, 3-cycles, 4-cycles, produits de 2 transpositions disjointes). La dimension cherchée est donc 5.

Partie II

1 pt **A1(a) :** $(e+f)^2 = e^2 + ef + fe + f^2 = e + 0 + 0 + f = e + f$ donc $e + f \in P(A)$. $(1-e)^2 = 1 - 2e + e^2 = 1 - 2e + e = 1 - e$ donc $1 - e \in P(A)$; d'autre part $e(1-e) = e - e^2 = 0$ et de même $(1-e)e = 0$.

2 pts **A2 :** soit $e \in P(A)$; supposons par exemple que $e \neq 0$, et montrons que $e = 1$. D'après (R2), on a $r(e) > 0$ donc $r(e) \geq 1$ puisque $r(e) \in \mathbb{N}$. D'autre part, appliquant (R3) aux idempotents orthogonaux e et $1-e$, on trouve $r(e) + r(1-e) = r(1) = 1$ d'après (R1). Comme $r(e) \geq 1$ et $r(1-e) \geq 0$ ceci implique $r(1-e) = 0$ d'où $e = 1$ d'après (R2), cqfd.

2 pts **A3 :** il suffit de voir que le produit $A_1 \times A_2$ de deux anneaux non nuls admet un idempotent différent de 0 et de 1. L'élément $e = (1_{A_1}, 0_{A_2})$ est bien idempotent, et il est différent de $0 = (0_{A_1}, 0_{A_2})$ et de $1 = (1_{A_1}, 1_{A_2})$ puisque $0_{A_i} \neq 1_{A_i}$ pour $i = 1, 2$ (l'anneau A_i n'étant pas nul).

3 pts **A4 :** comme $e^2 = e$, la matrice e est annulée par le polynôme $X^2 - X$ qui est scindé à racines distinctes. Donc e est diagonalisable, à valeurs propres 0 et 1, et a donc mêmes rang et trace qu'une matrice diagonale à éléments diagonaux tous égaux à 0 ou à 1, pour laquelle l'assertion est triviale.

1 pt **B1 :** $\mathbb{Z}[G]$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{Q}[G]$ par définition ; comme il est clair qu'il contient l'unité χ_e, il reste à voir qu'il est stable par le produit de convolution. Comme celui-ci est $\mathbb{Z}$-bilinéaire il suffit de vérifier que le produit $\chi_g\chi_{g'}$ de deux générateurs quelconques appartient à $\mathbb{Z}[G]$, ce qui résulte encore de la formule $\chi_g\chi_{g'} = \chi_{gg'}$.

3 pts **B2 :** écrivons $x = \sum_{g\in G} x(g)\chi_g$ et calculons (les termes diagonaux de) la matrice de $\tilde{x}$ dans la base des χ_g. On a

$$\tilde{x}(\chi_u) = x\chi_u = \sum_{g\in G} x(g)\chi_{gu}$$

et le coefficient de χ_u dans le membre de droite est $x(e) = \tau(x)$. Les termes diagonaux sont donc tous égaux à $\tau(x)$, d'où le résultat.

5 pts **B3 :** Il est clair sur la définition que τ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Dautre part, si $x \in P(\mathbb{Z}[G])$ alors l'endomorphisme $\tilde{x}$ est idempotent (il est clair que $x \mapsto \tilde{x}$ est un morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}[G]$ dans $\mathrm{End}(V)$) donc, d'après A4, sa trace est ≥ 0 ; donc $\tau(x) \geq 0$ d'après B2, donc $\tau(x) \in \mathbb{N}$.

La propriété (R1) est immédiate sur la définition de τ, ainsi que (R3) (sans condition sur e et f, d'ailleurs). Montrons (R2) : soit $x \in P(\mathbb{Z}[G])$ tel que $\tau(x) = 0$. Alors $\mathrm{Tr}(\tilde{x}) = 0$ par B2, donc $\tilde{x}$ est de rang nul (et donc nul) par A4, donc $x = \tilde{x}(\chi_e) = 0$, cqfd.

On conclut que $\mathbb{Z}[G]$ est indécomposable par A2 et A3.

Partie III :

1 pt **1 :** puisque X_A est engendré par les $X(a,b)$, il est clair que $C(A)$ est engendré par les $a \wedge b$. Il suffit donc de remarquer que (pour $\lambda \in k$) $\lambda(a \wedge b)$ est de la forme $a' \wedge b'$. Or $\lambda(a \wedge b) - (\lambda a) \wedge b$ est la classe de $-\gamma(a,b,\lambda)$ donc est nul, de sorte que $\lambda(a \wedge b) = (\lambda a) \wedge b$.

2 pts **2 :** Par définition, $a\wedge b+b\wedge a$ est la classe dans $C(A)$ de $\alpha(a,b)$, donc est nul. De même, $(ab)\wedge c - a\wedge(bc) + (ca)\wedge b$ est la classe dans $C(A)$ de $\beta(a,b,c)$, donc est nul.

En prenant (par exemple) $b = c = 1$ dans la deuxième relation, on trouve $a \wedge 1 = a \wedge 1 + a \wedge 1$ d'où $a \wedge 1 = 0$, qui entraîne $1 \wedge a = 0$ par antisymétrie.

4 pts **3 :** L'unicité est claire puisque $C(A)$ est engendré par les $a \wedge b$. Montrons l'existence.

D'abord, comme les $X(a,b)$ forment une base de X_A, il existe une unique application linéaire $\tilde{f} : X_A \to V$ telle que $\tilde{f}(X(a,b)) = f(a,b)$ pour tout $(a,b) \in A \times A$.

On a alors, vu les hypothèses sur f :

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(\alpha(a,b)) &= f(a,b) + f(b,a) = 0\\
\tilde{f}(\beta(a,b,c)) &= f(ab,c) - f(a,bc) + f(ca,b) = 0\\
\tilde{f}(\gamma(a,b,\lambda)) &= f(\lambda a,b) - \lambda f(a,b) = 0\\
\tilde{f}(\delta(a,b,c)) &= f(a+b,c) - f(a,c) + f(b,c) = 0
\end{aligned}$$

de sorte que $\tilde{f}$ est nulle sur Y_A et passe donc au quotient en une application linéaire $\hat{f} : C(A) \to V$ telle que, pour tout $(a,b) \in A \times A$, on ait $\hat{f}(a \wedge b) = \tilde{f}(X(a,b)) = f(a,b)$, cqfd.

1 pt **4(a) :** On applique la question 3 avec $V = A$ et $f : A \times A \to A$ définie par $f(a,b) = [a,b]$. Il est immédiat que f est bilinéaire et antisymétrique ; d'autre part, la relation $[a,bc] = [ab,c] + [ca,b]$ se vérifie directement en « développant » les commutateurs. La question 3 fournit alors $\hat{f} : C(A) \to A$ qui est l'application θ_A cherchée.

1 pt **4(b) :** comme $C(A)$ est engendré par les $a \wedge b$, l'image de θ_A est le sous-espace de A engendré par les commutateurs, de sorte que $A/\theta_A(C(A)) = A/[A,A] = H_0(A)$.

1 pt **5(a) :** appliquant les définitions, on trouve $\mathrm{Tr}'(E_{ij}(a), E_{kl}(b)) = \delta_{il}\delta_{jk}(a \wedge b)$.

2 pts **5(b) :** on applique la question 3 à l'algèbre $M_p(A)$ et à l'application $f = \mathrm{Tr}' : M_p(A) \times M_p(A) \to C(A)$. Celle-ci est clairement bilinéaire (d'ailleurs c'est dit dans l'énoncé). D'autre part (dans les sommes ci-dessous,

les indices $i, j, \ldots$ parcourent les entiers de 1 à p) :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}'(m,n) + \mathrm{Tr}'(n,m) &= \sum_{(i,j)} m_{ij} \wedge n_{ji} + \sum_{(k,l)} n_{kl} \wedge m_{lk} \\
&= \sum_{(i,j)} m_{ij} \wedge n_{ji} + \sum_{(i,j)} n_{ji} \wedge m_{ij} \qquad \text{(changement des noms d'indices)} \\
&= \sum_{(i,j)} (m_{ij} \wedge n_{ji} + n_{ji} \wedge m_{ij}) \\
&= 0 \qquad \text{(relation } a \wedge b + b \wedge a = 0 \text{ de la question 2).}
\end{aligned}$$

Enfin :

$$\mathrm{Tr}'(m, nq) = \sum_{(i,j)} m_{ij} \wedge (nq)_{ji} = \sum_{(i,j,k)} m_{ij} \wedge (n_{jk} q_{ki})$$

et de même $\mathrm{Tr}'(mn, q) = \sum_{(i,j,k)} (m_{ij} n_{jk}) \wedge q_{ki}$ et $\mathrm{Tr}'(qm, n) = \sum_{(i,j,k)} (q_{ki} m_{ij}) \wedge n_{jk}$ de sorte que la seconde relation de la question 3 résulte de la relation $m_{ij} \wedge (n_{jk} q_{ki}) = (m_{ij} n_{jk}) \wedge q_{ki} + (q_{ki} m_{ij}) \wedge n_{jk}$ de la question 2.

2 pts **5(c) :** Comme $C(M_p(A))$ est engendré par les $m \wedge n$, il suffit de vérifier la relation $\theta_A(\widehat{\mathrm{Tr}'}(m \wedge n)) = \mathrm{Tr}\, \theta_{M_p(A)}(m \wedge n)$. Le premier membre vaut

$$\theta_A(\mathrm{Tr}'(m,n)) = \sum_{i,j} \theta_A(m_{ij} \wedge n_{ji}) = \sum_{i,j} [m_{ij}, n_{ji}].$$

Le second membre est $\mathrm{Tr}[m,n] = \sum_{i,j} [m_{ij}, n_{ji}]$ (calcul immédiat) d'où la relation cherchée.

Il en résulte que $H_1(M_p(A)) = \ker(\theta_{M_p(A)}) \subset \ker(\theta_A \circ \widehat{\mathrm{Tr}'})$ ce qui signifie bien que $\widehat{\mathrm{Tr}'}(H_1(M_p(A))) \subset \ker(\theta_A) = H_1(A)$.

2 pts **5(d) :** soit $x \in H_1(A)$. Alors, d'après la question 1, x est de la forme $\sum_{i=1}^n a_i \wedge b_i$, avec (par définition de $H_1(A)$) la relation $\sum_{i=1}^n [a_i, b_i] = 0$ dans A. Considérons l'élément $y = \sum_{i=1}^n E_{11}(a_i) \wedge E_{11}(b_i)$ de $C(M_p(A))$. On a d'abord

$$\begin{aligned}
\theta_{M_p(A)}(y) &= \sum_{i=1}^n [E_{11}(a_i), E_{11}(b_i)] \\
&= \sum_{i=1}^n E_{11}([a_i, b_i]) \\
&= E_{11}(\sum_{i=1}^n [a_i, b_i]) = 0
\end{aligned}$$

de sorte que $y \in H_1(M_p(A))$. De plus $\mathrm{Tr}_1(y) = \widehat{\mathrm{Tr}'}(y) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Tr}'(E_{11}(a_i), E_{11}(b_i)) = \sum_{i=1}^n a_i \wedge b_i = x$, cqfd.

1 pt **6(a) :** La relation $res(P') = 0$ est immédiate à partir des définitions.

La formule pour $(PQ)'$ est clairement bilinéaire en (P, Q) de sorte qu'il suffit de la vérifier pour $P = t^m$ et $Q = t^n$ $(m, n \in \mathbb{Z})$. On a alors :

$$(PQ)' = (t^{m+n})' = (m+n) t^{m+n-1}$$

et

$$P'Q + PQ' = m t^{m-1} t^n + n t^n t^{m-1} = (m+n) t^{m+n-1}$$

d'où le résultat.

2 pts **6(b) :** On applique la question III-3 à l'algèbre $A = k[t, t^{-1}]$ et à l'application, clairement bilinéaire, $f : A \times A \to k$ donnée par $f(P, Q) = res(PQ')$. Vérifions les deux relations du III-3 : d'abord

$$f(P,Q) + f(Q,P) = res(PQ' + P'Q) = res((PQ)') = 0$$

(question précédente) et d'autre part

$$\begin{aligned} f(P,QR) - f(PQ,R) - f(RP,Q) &= res(P(QR)') - PQR' - RPQ') \\ &= res(PQR' + PQ'R - PQR' - RPQ') = 0 \end{aligned}$$

(on remarque que A est commutative !), cqfd.

3 pts **6(c) :** notons $\Phi(P,n)$ l'égalité $P \wedge t^n = nPt^{n-1} \wedge t$ à démontrer.

D'abord $\Phi(P,0)$ est l'identité $P \wedge 1 = 0$ vue en III-2.

Supposons $\Phi(P,n-1)$ vérifiée pour tout P. Alors

$$\begin{aligned} P \wedge t^n &= P \wedge tt^{n-1} \\ &= (Pt) \wedge t^{n-1} + (t^{n-1}P) \wedge t \qquad \text{(d'après III-2)} \\ &= (n-1)t^{n-2}Pt \wedge t + (t^{n-1}P) \wedge t \qquad \text{(d'après } \Phi(Pt, n-1)) \\ &= nPt^{n-1} \wedge t \end{aligned}$$

de sorte que, par récurrence, $\Phi(P,n)$ est vérifiée pour tout P et tout $n \in \mathbb{N}$.

De plus, le calcul qui précède montre que, pour t et P quelconques, $\Phi(P,n)$ est *équivalente* à $\Phi(Pt,n-1)$. Comme t est inversible dans A, on voit donc que, pour n donné, $\Phi(P,n)$ pour tout P implique $\Phi(P,n-1)$ pour tout P (plus précisément, $\Phi(t^{-1}P,n)$ implique $\Phi(P,n-1)$). Donc $\Phi(P,0)$ (pour tout P) implique aussi $\Phi(P,n)$ pour tout P et tout $n \leq 0$.

La relation $P \wedge Q = PQ' \wedge t$ en résulte par linéarité en Q ($\Phi(P,n)$ étant le cas où $Q = t^n$). On en déduit $P \wedge Q = -Q \wedge P = -QP' \wedge t$, et en prenant $Q = 1$ on trouve $P' \wedge t = 0$.

3 pts **6(d) :** on remarque d'abord que $H_1(k[t,t^{-1}]) = C(k[t,t^{-1}])$ puisque $k[t,t^{-1}]$ est commutative. Il s'agit donc de voir que $Res : C(k[t,t^{-1}]) \to k$ est un isomorphisme. D'abord $Res(t^{-1} \wedge t) = res(t^{-1}) = 1$ donc Res est surjectif. Pour conclure, il suffit donc de voir que $C(k[t,t^{-1}])$ est de dimension ≤ 1, c'est-à-dire engrendré (comme k-espace vectoriel) par un élément. On sait qu'il est engendré par les $P \wedge Q$, donc par les $P \wedge t^n$ par linéarité en Q, donc par les $P \wedge t$ d'après la premère relation de 6(c), donc par les $t^m \wedge t$ ($m \in \mathbb{Z}$) par linéarité en P. Mais, si $m \neq -1$, on a $t^m = (t^{m+1}/(m+1))'$ (on utilise la caractéristique nulle ici) donc $t^m \wedge t = 0$ pour $m \neq -1$ (dernière relation de 6(c)), de sorte que $C(k[t,t^{-1}])$ est engrendré par le seul élément $t^{-1} \wedge t$, cqfd.

Partie IV :

1 pt **A1(a) :** pour $u,v,w \in U$ et $x,y,z \in E$, on a

$$\begin{aligned} \{(u,x),(v,y)\} + \{(v,y),(u,x)\} &= (<u,v>, \alpha(u,v)) + (<v,u>, \alpha(v,u)) \\ &= (<u,v> + <v,u>, \alpha(u,v) + \alpha(v,u)) = (0,0) \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \{(u,x),\{(v,y),(w,z)\}\} &= \{(u,x),(<v,w>, \alpha(v,w))\} \\ &= (<u,<v,w>>, \alpha(u,\alpha(v,w))) \end{aligned}$$

de sorte que (L2) pour $\{,\}$ résulte de (L2) pour $<,>$ et de (C2) pour α.

1 pt **A1(b) :** il est clair que p est linéaire, et d'autre part il résulte des définitions que $p(\{(u,x),(v,y),)\} = <u,v>$, cqfd.

2 pts **A1(c) :** soit $s : L \to L(\alpha)$ un ℓ-morphisme tel que $p \circ s = \mathrm{Id}_L$. Alors s est de la forme $u \mapsto (u, f(u))$ où $f : U \to E$ est linéaire. La relation $s(u,v) = \{s(u), s(v)\}$ donne immédiatement $\alpha(u,v) = f(<u,v>)$.

Réciproquement, soit f comme dans l'énoncé : alors le même calcul montre que l'application $u \mapsto (u, f(u))$ est un ℓ-morphisme de L dans $L(\alpha)$ tel que $p \circ s = \mathrm{Id}_L$.

1 pt **A2(a) :** les deux relations résultent de la définition du crochet, et d'un calcul explicite.

1 pt **A2(b) :** vu la linéarité de φ, il suffit de voir que $(a,b) \mapsto a \wedge b$ est un cocycle sur $L(A)$ à valeurs dans $C(A)$. La relation (C1) s'écrit (pour $a,b,c \in A$) :

$$a \wedge b + b \wedge a = 0$$

ce qui a été vu dans III-2, et

$$a \wedge [b,c] + b \wedge [c,a] + c \wedge [a,b] = 0$$

ce qui s'écrit encore

$$a \wedge bc - a \wedge cb + b \wedge ca - b \wedge ac + c \wedge ab - c \wedge ba = 0$$

qui résulte des relations de III-2.

3 pts **A2(c) :** d'après les définitions et A1(c), l'extension $L(A)(\alpha_\varphi)$ est triviale si et seulement si il existe une application linéaire $f : A \to E$ telle que l'on ait $\varphi(a \wedge b) = f([a,b])$ pour tous a et b dans A.

Supposons cette condition réalisée, et soit $z \in H_1(A)$: alors z est de la forme $z = \sum_{i=1}^n a_i \wedge b_i$ avec $n \in \mathbb{N}$, les a_i et b_i dans A, et $\sum_{i=1}^n [a_i, b_i] = 0$. On a donc

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \sum_{i=1}^n \varphi(a_i \wedge b_i)\\ &= \sum_{i=1}^n f([a_i,b_i])\\ &= f(\sum_{i=1}^n [a_i,b_i]) = 0.\end{aligned}$$

Réciproquement, supposons φ nulle sur $H_1(A)$. On sait que $[A,A]$ est l'image de $\theta_A : C(A) \to A$ donc s'identifie au quotient $C(A)/H_1(A)$. Donc il existe $f_0 : [A,A] \to E$ linéaire (d'ailleurs unique) telle que $\varphi = f_0 \circ \theta_A$ et donc telle que $\varphi(a \wedge b) = f_0([a,b])$ pour tous a et b dans A. Il suffit alors de remarquer qu'il existe une application linéaire $f : A \to E$ prolongeant f_0 : celle-ci a alors la propriété voulue. (L'existence de f résulte de l'existence d'un supplémentaire de $[A,A]$ dans A, qui entraîne celle d'un projecteur $\pi : A \to A$ d'image $[A,A]$: on prend alors $f = \pi \circ f_0$).

4 pts **B1 :** il est clair que les t^n ($n \in \mathbb{Z}$) forment une base de A ; il en résulte que les $E_{ij}(t^n)$ forment une base de $M_p(A)$, d'où la base annoncée pour $M_p(A) \times k$.

Par définition, le ℓ-espace sous-jecent à $L(M_p(A))(\alpha_\varphi)$ est $M_p(A) \times k$ muni du crochet

$$\begin{aligned}\{(m,\lambda),(n,\mu)\} &= ([m,n], \alpha_\varphi(m,n))\\ &= ([m,n], \varphi(m \wedge n)) \qquad \text{(définition de } \alpha_\varphi)\\ &= ([m,n], Res(\widehat{\mathrm{Tr}'}(m \wedge n))) \qquad \text{(définition de } \varphi)\\ &= ([m,n], Res(\mathrm{Tr}'(m,n))) \qquad \text{(définition de } \widehat{\mathrm{Tr}'}).\end{aligned}$$

On voit déjà que si m ou n est nul le résultat est nul, d'où $\{c, z\} = 0$ pour tout $z \in L(M_p(A))(\alpha_\varphi)$.

D'autre part la formule précédente donne :

$$\begin{aligned}\{e_{ij}(t^n), e_{kl}(t^m)\} &= ([E_{ij}(t^n), E_{kl}(t^m)], Res(\mathrm{Tr}'(E_{ij}(t^n), E_{kl}(t^m)))\\ &= (\delta_{jk}\, E_{il}(t^{m+n}) - \delta_{il}\, E_{kj}(t^{m+n}), Res(\delta_{il}\,\delta_{jk}\,(t^n \wedge t^m))) \qquad \text{(I-B2(a) et III-5(a))}\\ &= (\delta_{jk}\, E_{il}(t^{m+n}) - \delta_{il}\, E_{kj}(t^{m+n}), \delta_{il}\,\delta_{jk}\, res(mt^{n+m-1})) \qquad \text{(définition de } Res).\end{aligned}$$

Si $m+n \neq 0$, le résidu au dernier membre est nul, d'où la seconde formule. Si $n = -m$, le résidu vaut m, et $t^{m+n} = 1$, ce qui donne

$$\{e_{ij}(t^{-m}), e_{kl}(t^m)\} = (\delta_{jk}\, E_{il}(1) - \delta_{il}\, E_{kj}(1), m\,\delta_{il}\,\delta_{jk})$$

d'où la troisième formule.

1 pt **B2 :** d'après A2(c), l'extension est triviale si et seulement si la restriction (notons-la φ_1) de $\varphi = Res \circ \widehat{\mathrm{Tr}'}$ à $H_1(M_p(A)$ est nulle. On peut écrire φ_1 comme $Res \circ \mathrm{Tr}_1$ où $\mathrm{Tr}_1 : H_1(M_p(A)) \to H_1(A)$ est définie en III-5(c), et est surjective d'après III-5(d). De plus $Res : H_1(A) \to k$ est aussi surjective (et même bijective)

d'après III-6(d). Donc $\varphi_1 : H_1(M_p(A)) \to k$ est surjective, et par suite l'extension $L(M_p(A))(\alpha_\varphi)$ n'est pas triviale.

1 pt **C1(a) :** Il est immédiat que $P \mapsto \tilde{P}$ est linéaire, envoie 1 sur Id_A et respecte la multiplication (conséquence de l'associativité d'icelle).

1 pt **C1(b) :** il s'agit de montrer que, pour tout $Q \in A$, on a

$$d^q(PQ) = \sum_{\ell=0}^{q} \binom{q}{\ell} P^{(\ell)}\, Q^{q-\ell}$$

ce qui n'est autre que la « formule de Leibniz », qui se vérifie par exemple directement pour $P = t^n$ et $Q = t^m$, ce qui suffit par bilinéarité.

2 pts **C2(a) :** il résulte de 1(a) que les $\widetilde{P}$ forment un sous-espace de $End(A)$, qui est engendré par les u^p $(p \in \mathbb{Z})$ (noter qu'un morphisme d'algèbres respecte aussi les inverses donc $u^p = \widetilde{t^p}$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$). Donc D est engendré par les $u^p\, d^q$ $(p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N})$.

Montrons qu'ils forment une famille libre : supposons une relation non triviale

$$\sum_{q=a}^{b} \sum_{p=-M}^{M} \lambda_{p,q} u^p\, d^q = 0$$

avec $0 \le a \le b$, et $\lambda_{p,a} \neq 0$ pour au moins un p. Appliquant cette relation dans $End(A)$ à l'élément $t^a \in A$, et remarquant que $d^q(t^a) = 0$ pour $q > a$ et $d^a(t^a) = a!$, on obtient

$$a! \sum_{p} \lambda_{p,a}\, t^p = 0$$

et comme k est de caractéristique nulle, le coefficient $a!$ est non nul de sorte que les $\lambda_{p,a}$ sont tous nuls, contrairement à l'hypothèse.

1 pt **C2(b) :** il est clair que D est stable par multiplication à gauche par les u^p $(p \in \mathbb{Z})$ et à droite par les d^q $(q \in \mathbb{N})$. Il reste à voir qu'il est stable par multiplication à droite par les u^p et à gauche par les d^q : les deux propriétés résultent de 1(b).

Comme on sait déjà que D est un sous-espace de $End(A)$, et qu'il contient $\mathrm{Id}_A = \tilde{1}$, c'est bien une sous-algèbre de $End(A)$.

2 pts **C3 :** on a $[u, u^q\, d^r] = u^{q+1}\, d^r - u^q\, d^r\, u$. Appliquant 1(b) avec $P = t$, on trouve $d^r\, u = u\, d^r + r\, d^{r-1}$; en substituant, on obtient

$$[u, u^q\, d^r] = -r\, u^q\, d^{r-1}$$

(si $r = 0$, le second membre est nul). Cette formule montre que $[D, D]$ contient tous les $u^q\, d^m$ pour $q \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}$ puisque $u^q\, d^m = -[u, u^q\, d^{m+1}]/(m+1)$ (on utilise encore la caractéristique 0). Comme ces gens engendrent D, on a $[D, D] = D$ d'où $H_0(D) = 0$. Donc toute trace sur D est nulle d'après I-A2.

1 pt **D1 :** un calcul immédiat (à partir de la formule $(PQ)' = P'Q + PQ'$) donne $d\,\widetilde{P} = \widetilde{P'} + \widetilde{P}\, d$ pour tout $P \in A$. On en tire

$$\begin{aligned}
[\widetilde{P}\, d, \widetilde{Q}\, d] &= \widetilde{P}\, d\, \widetilde{Q}\, d - \widetilde{Q}\, d\, \widetilde{P}\, d \\
&= \widetilde{P}\, (\widetilde{Q'} + \widetilde{Q}\, d)\, d - \widetilde{Q}\, (\widetilde{P'} + \widetilde{P}\, d)\, d \\
&= (\widetilde{PQ' - QP'})\, d.
\end{aligned}$$

Comme il est clair que W est l'ensemble des $\widetilde{P}\, d$ pour $P \in A$, ce calcul montre qu'il est stable par le crochet et est donc un ℓ-espace.

4 pts **D2 :** noter d'abord que α est bien définie car $\widetilde{P}\, d$ détermine P (en effet, $P = (\widetilde{P}\, d)(t)$). Plus précisément, l'application $\varphi : P \mapsto \widetilde{P}\, d$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de A sur W ; la question D1 montre que cet isomorphisme transforme la loi de composition

$$(P, Q) \mapsto\ < P, Q > := PQ' - QP'$$

sur A en le crochet $[\,,\,]$ sur W, de sorte que $<,>$ est un crochet sur A et que φ est un isomorphisme de ℓ-espaces. Il s'agit donc de voir que l'application $\beta : A \times A \to k$ donnée par

$$\beta(P,Q) = \frac{1}{12}\, res(P'Q'' - P''Q')$$

est un cocycle sur $(A,<,>)$. Il suffit évidemment de vérifier (on est en caractéristique nulle) que 12β est un cocycle.

La relation (C1) est évidente ; d'autre part on peut remarquer que $P'Q'' - P''Q' = (P'Q')' - 2P''Q'$, et comme le résidu de $(P'Q')'$ est nul d'après III-6(a), on est ramené à voir que $\gamma : A \to k$ défini par

$$\gamma(P,Q) = res(P''Q')$$

vérifie (C2).

Calculons $\gamma(P,< Q,R >)$:

$$\begin{aligned}\gamma(P,< Q,R >) &= res(P''< Q,R >')\\ &= res(P''(Q'R - QR')')\\ &= res(P''Q''R - P''QR'').\end{aligned}$$

On en tire

$$\begin{aligned}&\gamma(P,< Q,R >) + \gamma(Q,< R,P >) + \gamma(R,< P,Q >)\\ &\qquad= res(P''Q''R + PQ''R'' + P''QR'' - P''QR'' - P''Q''R - PQ''R'')\\ &\qquad= res(0) = 0.\end{aligned}$$

d'où la relation (C2).

3 pts **D3 :** posons $c = (0,1)$ et $L_n = (u^{n+1}\, d, 0)$. Il est clair que les L_n et c forment une base de Vir (en effet, les $u^{n+1}\, d$ forment une base de W puisque les t^{n+1} forment une base de A), et il est clair sur la définition du crochet dans Vir que $\{c,x\} = \{x,c\} = 0$ pour tout $x \in Vir$.

On trouve immédiatement $[u^{n+1}\, d, u^{m+1}\, d] = (m-n)\, u^{n+m+1}\, d$ (en utilisant D1 par exemple). D'autre part

$$\alpha(u^{n+1}\, d, u^{m+1}\, d) = \frac{1}{12} res\big((n+1)(m+1)(m-n)\, t^{m+n-1}\big)$$

d'où

$$\{L_n, L_m\} = (m-n)\Big(u^{n+m+1}\, d,\ \frac{1}{12} res\big((n+1)(m+1)\, t^{m+n-1}\big)\Big).$$

Si $n + m \neq 0$ le résidu est nul et

$$\{L_n, L_m\} = (m-n)(u^{n+m+1}\, d, 0) = (m-n)\, L_{n+m}.$$

En prenant $n = -m$ on trouve d'autre part

$$\begin{aligned}\{L_{-m}, L_m\} &= (2m)\,\Big(ud,\ \frac{1}{12} res\big((-m+1)(m+1)\, t^{-1}\big)\Big)\\ &= 2m\,(ud,0) + \frac{2m(1-m^2)}{12}(0,1)\\ &= 2m\, L_0 \ - \ \frac{m^3 - m}{6} c.\end{aligned}$$

1 pt **D4(a) :** supposons l'extension triviale. D'après A-1(c), il existe une application linéaire $f : W \to k$ telle que $\alpha(\widetilde{P}\, d, \widetilde{Q}\, d) = f([\widetilde{P}\, d, \widetilde{Q}\, d])$ pour tous P et Q dans A. Or $\alpha(u^{n+1}\, d, u^{m+1}\, d) = 0$ chaque fois que $n = -1$ par exemple ; on doit donc avoir, pour tout m,

$$0 = f([d, u^{m+1}\, d]) = (m+1)\, f(u^m\, d)$$

d'où $f(u^m\, d) = 0$ pour tout $m \neq -1$; d'autre part, prenant $n = 0$ et $m = -2$ dans les formules qui précèdent, on trouve

$$[u\, d,\; u^{-1}\, d] = -2u^{-1}\, d$$

$$\alpha(u\, d,\; u^{-1}\, d) = 0$$

(dans la seconde équation apparaît le résidu de t^{-3}) d'où aussi $f(u^{-1}\, d) = 0$: finalement, f est nulle sur tous les $u^p\, d$ donc nulle, ce qui est absurde puisque $\alpha(u^{-1}\, d, u^3\, d) \neq 0$ par exemple.

Donc l'extension Vir n'est pas triviale.

1 pt **D4(b) :** considérons l'extension $p : L(D)(\alpha_\varphi) \to L(D)$. Sa restriction au-dessus du sous-ℓ-espace W de $L(D)$ est l'extension Vir, et n'est donc pas triviale. Donc $L(D)(\alpha_\varphi)$ n'est pas triviale, et il est donc clair d'après A-2(c) que $H_1(D)$ n'est pas nul.