Théorème de Mittag-Leffler dans le plan: fonctions méromorphes avec prescription de pôles

Bachir Bekka

9 Mai 2006

Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes dans Ω, deux-à-deux distincts et sans valeur d'adhérence dans Ω. Le théorème de Mittag-Leffler (mathématicien suédois, 1846–1927; d'après une légende, qui est trop belle pour être vraie, il serait à l'origine du fait que le prix Nobel n'est pas décerné en mathématiques) assure l'existence d'une fonction méromorphe f sur Ω dont l'ensemble des pôles est exactement $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. En fait, on peut même prescrire la partie polaire du développement de Laurent (c-à-d, la partie formée des puissances strictement négatives de $z - a_n$) de f en chacun des a_n. Ceci est démontré dans Rudin "Analyse réelle et complexe", Chapitre 13, comme conséquence du théorème d'approximation de Runge. Nous traiterons ici le cas $\Omega = \mathbb{C}$ qui est particulièrement simple.

Théorème 1 ***(Mittag-Leffler)*** *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes Ω, deux-à-deux distincts et sans valeur d'adhérence dans $\mathbb{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit P_n un polynôme à coefficients complexes sans terme constant. Alors il existe une fonction méromorphe f sur $\mathbb{C}$ dont l'ensemble des pôles est exactement $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la partie polaire du développement de Laurent de f en a_n soit $P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$.*

Preuve Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \{a_n\}$, posons

$$f_n(z) = P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right).$$

Alors f_n est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ dont l'unique pôle est a_n, de partie polaire égale à f_n. On aimerait définir f par $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$. Le problème est que rien n'assure qu'une telle série converge: par exemple, pour $a_n = n$ et $P_n(z) = z - n$, cette série est $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{z-n}$ et est divergente pour tout z. L'idée est alors de "perturber" f_n en lui ajoutant un terme holomorphe g_n, de manière à garantir la convergence de $\sum_{n=0}^{\infty}(f_n - g_n)$; parfois, il suffira de prendre pour g_n une constante $c_n \in \mathbb{C} \ldots$

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $|a_0| \le |a_2| \le \cdots$. On observera que $\lim_n |a_n| = \infty$, car $(a_n)_n$ n'a pas de valeur d'adhérence dans $\mathbb{C}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme f_n est holomorphe sur la boule $B(0, |a_n|)$, elle y admet un développement en série

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(n)} z^k \qquad \text{pour tout} \quad z \in B(0, |a_n|);$$

cette série converge uniformément sur la boule fermée $\overline{B}(0, |a_n|/2) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| \le |a_n|/2\}$. On peut donc trouver $k_n \in \mathbb{N}$ tel que

$$|f_n(z) - \sum_{n=0}^{k_n} c_k^{(n)} z^k| \le \frac{1}{2^n}, \qquad \text{pour tout} \quad z \in \overline{B}(0, |a_n|/2).$$

Notons par g_n le polynôme $g_n(z) = \sum_{n=0}^{k_n} c_k^{(n)} z^k$ et montrons que la série $\sum_{n=0}^{\infty}(f_n(z) - g_n(z))$ converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{C} \setminus \{a_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$.

En effet, soit $R > 0$. Comme $\lim_n |a_n| = \infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|a_n| > 2R$ pour tout $n \ge n_0$. Pour tout $z \in B(0, R)$, on a alors

$$|f_n(z) - g_n(z)| \le \frac{1}{2^n}.$$

Ceci montre que $\sum_{n=n_0}^{\infty}(f_n(z) - g_n(z))$ est normalement convergente et donc uniformément convergente sur $B(0, R)$; sa somme est donc une fonction holomorphe sur $B(0, R)$. D'autre part, la fonction $z \mapsto \sum_{n=0}^{n_0-1}(f_n(z) - g_n(z))$ est une fonction rationnelle sur $\mathbb{C}$, de pôles $a_0, a_1, \ldots, a_{n_0-1}$ avec parties polaires respectives $f_0, f_1, \ldots, f_{n_0-1}$.

Comme R était arbitraire, il s'ensuit que la série $\sum_{n=0}^{\infty}(f_n(z) - g_n(z))$ converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{C} \setminus \{a_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ vers une fonction f.

Il reste à montrer que f est méromorphe sur $\mathbb{C}$, ayant $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ comme ensemble de pôles et dont la partie polaire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, est f_n. Pour $R > 0$, choisssons n_0 comme plus haut. Alors, pour tout $z \in B(0, R)$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{n_0-1} (f_n(z) - g_n(z)) + \sum_{n=n_0}^{\infty} (f_n(z) - g_n(z)).$$

La 2ème somme est holomorphe sur $B(0, R)$. Les singularités de f dans $B(0, R)$ sont donc les singularités de la 1ère somme qui est une fonction rationnelle avec pôles $a_0, a_1, \ldots, a_{n_0-1}$ et les parties polaires respectives de f sont celles de cette fonction rationnelle, c-à-d $f_0, f_1, \ldots, f_{n_0-1}$. ■

Remarque 2 La solution du problème posé dans le théorème précédent est unique à une fonction entière près. Plus précisement, soient f et g deux fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$ avec mêmes pôles et même partie polaire en chacun de ces pôles. Alors $f - g$ est une fonction entière sur $\mathbb{C}$. En effet, $f - g$ possède une singularité artificielle en chacun de ces pôles.

Exemple 3 On va montrer qu'on a un développement en série de fonctions rationnelles

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2}, \qquad \text{pour tout} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}.$$

En effet, la fonction $g(z) = \pi^2/\sin^2 \pi z$ possède un pôle en tout $n \in \mathbb{Z}$. Elle est 1-périodique, c-à-d $g(z+1) = g(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Sa partie polaire en 0 est $f_0(z) = \dfrac{1}{z^2}$. Sa partie polaire en $n \in \mathbb{Z}$ est donc $f_n(z) = \dfrac{1}{(z-n)^2}$.

D'autre part, la série $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dfrac{1}{(z-n)^2}$ est uniformément convergente sur les compacts de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$; f est donc une fonction méromorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, avec partie polaire $f_n(z) = \dfrac{1}{(z-n)^2}$ en tout $n \in \mathbb{Z}$. Il s'ensuit (voir remarque précédente) que $h = f - g$ est une fonction entière sur $\mathbb{C}$. On va montrer que $h = 0$.

On observera que h est périodique de période 1, car f et g le sont. Il suffit donc d'étudier h sur la bande

$$H = \{z \in \mathbb{C} \ : 0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1\}.$$

Comme

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{ix}e^{-y} - e^{-ix}e^{y}), \qquad z = x + iy,$$

on a

$$|\sin z| \geq \frac{1}{2}\left||e^{ix}e^{-y}| - |e^{-ix}e^{y}|\right| = |\sinh y|;$$

d'où $\left|\dfrac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}\right| \leq \dfrac{\pi^2}{(\sinh y)^2}$ et par conséquent

$$\lim_{|y|\to+\infty} \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = 0$$

uniformément en x pour $z = x + iy$.

D'autre part, soit $z = x + iy \in H$ et $n \in \mathbb{Z}$. On a $0 \leq x \leq 1$ et donc

$$|z-n|^2 = |y|^2 + |x-n|^2 \quad \geq \quad \begin{cases} |y|^2 + (n-1)^2 & \text{si } n \geq 1 \\ |y|^2 + n^2 & \text{si } n \leq 0. \end{cases}$$

D'où

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|z-n|^2} \quad &\leq \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{|y|^2 + (n-1)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{|y|^2 + n^2} \\ &\leq \quad 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{|y|^2 + n^2} \leq 4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(|y| + n)^2} \leq 4 \sum_{n\geq|y|-1} \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

Comme $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$ est convergente, on a $\lim_{|y|\to+\infty} \sum_{n\geq|y|-1} \dfrac{1}{n^2} = 0$ et ceci montre que $\lim_{|y|\to+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dfrac{1}{(z-n)^2} = 0$ *uniformément* en x pour $z = x + iy \in H$.

Il s'ensuit que $\lim_{|y|\to+\infty} h(z) = 0$ *uniformément* en x pour $z = x + iy \in H$. Comme h est holomorphe sur H et donc continue, on en déduit que h est bornée sur H et donc sur $\mathbb{C}$ par périodicité. Mais h est une fonction entière. Par Liouville, h est donc constante. Comme $\lim_{|y|\to+\infty} h(z) = 0$, on a nécessairement $h = 0$.

Remarque 4 Le développement précédent $\dfrac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dfrac{1}{(z-n)^2}$ peut s'obtenir également en utilisant un peu d'analyse de Fourier. Pour cela, on procède comme suit.

Pour $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}$ fixé, on considère la fonction 1-périodique f d'une variable réelle et à valeurs complexes définie par $f(t) = e^{2\pi izt}$. Un calcul montre que les coefficients de Fourier de f, vue comme fonction sur le cercle, sont

$$\widehat{f}(n) = (-1)^n \frac{\sin(\pi z)}{\pi(z-n)}, \qquad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

On considère la fonction g définie par $g(t) = \overline{f(-t)} = e^{-2\pi i\bar{z}t}$ On a alors $\widehat{g}(n) = \overline{\widehat{f}(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. L'identité de Parseval-Bessel

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\overline{\widehat{g}(n)} = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$$

montre alors que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\sin^2 \pi z}{\pi^2(z-n)^2} = 1.$$

En remplaçant z par z/π, on obtient l'identité voulue.

Exercice 5 (i) Vérifier que la preuve du théorème de Mittag-Leffler montre que

$$f(z) = \frac{1}{z} \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right)$$

est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, avec $\mathbb{Z}$ comme ensemble des pôles et telle que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la partie polaire du développement de Laurent de f en n est $\dfrac{1}{z-n}$.
(ii) Montrer qu'on a le développement suivant de la fonction $z \mapsto \pi \cot \pi z$

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right).$$

Remarque 6 Soit Ω un *réseau* dans $\mathbb{C}$, c-à-d un sous-groupe discret de rang 2 de $\mathbb{C}$. On peut aisément montrer que la série $\sum_{\omega\in\Omega,\omega\neq 0} \left(\dfrac{1}{(z-\omega)^2} - \dfrac{1}{\omega^2} \right)$ converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{C} \setminus \Omega$.
La *fonction de Weierstraß* de Ω

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in\Omega,\omega\neq 0} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right),$$

est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, avec Ω comme ensemble de pôles et partie polaire $1/(z-\omega)^2$ en chaque $\omega \in \Omega$. De plus, $\wp$ possède Ω comme groupe de périodes: $\wp(z+\omega) = \wp(z)$ pour tout $\omega \in \Omega$. C'est une fonction *elliptique* pour le réseau Ω; on appelle ainsi toute fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ dont le groupe de périodes contient Ω.

Il est facile de voir que les fonctions elliptiques pour le réseau Ω forment un sous-corps $K(\Omega)$ du corps des fonctions méromorphes. En fait, toute fonction dans $K(\Omega)$ s'exprime comme fonction rationnelle de $\wp$ et $\wp'$ et–grâce à l'équation différentielle liant $\wp$ et $\wp'$–on obtient une description précise de $K(\Omega)$. Pour en savoir plus, voir par exemple l'ouvrage de M. Zisman, "Mathématiques pour l'agrégation".