Université de Rennes 1
Préparation à l'agrégation
de mathématiques
Auteur du document :

M. Coste

Géométrie Projective : autour du programme de l'agrégation

Michel Coste*

Novembre 2002

Programme

Voici la partie du programme (2002) de l'agrégation concernant la géométrie projective.

Espaces projectifs. Coordonnées homogènes, éléments l'infini. Application projective (ou homographie) associée une application linéaire injective. Groupe projectif. Droite projective : groupe des homographies, birapport.

Le paragraphe correspondant du programme précédent (2000) était :

Espaces projectifs. Application projective (ou homographie) associée à une application linéaire injective.
Groupe projectif. Coordonnées homogènes.
Exemples de propriétés projectives et d'utilisation d'éléments à l'infini.
Théorème fondamental de la géométrie projective.
Droite projective : groupe des transformations homographiques, birapport.

Les sections du texte suivant détaillent les points du programme. Il y a aussi une section sur la liaison affine-projectif (qui est sous-jacente quand on parle d'éléments à l'infini) et une section sur la dualité projective, qui apporte un éclairage intéressant sur la dualité pour les espaces vectoriels. Par contre, on ne dit rien des quadriques projectives (on peut voir à ce sujet [Aud] chap. 6 par. 3 [Sam] chap. 3 et 4, [Ber] chap. 14, [Leh] chap. 12, [Mar] chap. 7 et 8, [Tis] p. 128 – ces ouvrages sont ceux utilisés comme références). On laisse aussi de côté l'étude spécifique des homographies de la droite projective complexe (ou sphère de Riemann – on peut voir sur ce point [App], p. 298, et [Leb], p. 112).

1 Espaces projectifs

Dans tout ce qui suit, K est un corps commutatif. Pour cette section, voir [Aud] p. 133, [Sam] p. 13, [Ber] 4.1 et 4.6, [Leh] p. 267, [Mar] p.45, [Tis] p. 152.

Définition 1 *Soit E un espace vectoriel sur K. L'*espace projectif $\mathbb{P}(E)$ associé à E *est l'ensemble des droites vectorielles de E.*

Noter qu'*un point de $\mathbb{P}(E)$* est *une droite vectorielle de E.*

Exemple : Soit A un espace affine sur K de direction l'espace vectoriel $\overrightarrow{A}$, et soit $a \in A$. L'ensemble des droites affines de A passant par a s'identifie de manière canonique à $\mathbb{P}(\overrightarrow{A})$, et est ainsi un espace projectif.

Deux éléments x et y de $E \setminus \{0\}$ engendrent la même droite vectorielle si et seulement s'il existe $\lambda \in K^\times$ tel que $x = \lambda y$, ce qu'on notera $x \sim y$. Donc $\mathbb{P}(E)$ *s'identifie au quotient de $E \setminus \{0\}$ par la relation d'équivalence* $\sim$. Nous utiliserons constamment cette identification. Notons $\pi_E : E \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(E)$ (ou simplement π) la surjection canonique.

*Merci à S. Cantat, M. Couchouron et F. Dal'bo pour leurs remarques sur ce texte

Définition 2 *Une* variété linéaire projective *(ou sous-espace projectif) de* $\mathbb{P}(E)$ *est une partie de* $\mathbb{P}(E)$ *de la forme* $\pi(F\setminus\{0\})$*, où* F *est un sous-espace vectoriel de* E *(autrement dit, c'est l'ensemble des droites vectorielles de* F*). Si* F *est un hyperplan vectoriel de* E*,* $\pi(F\setminus\{0\})$ *est un* hyperplan projectif *de* $\mathbb{P}(E)$

Remarquer qu'une variété linéaire projective $\pi(F\setminus\{0\})$ de E est l'espace projectif $\mathbb{P}(F)$ associé à un sous-espace vectoriel F de E. Nous désignerons les variétés linéaires projectives par $\mathbb{P}(F)$ plutôt que $\pi(F\setminus\{0\})$.

Exercice 1 L'application $F \mapsto \mathbb{P}(F)$ est une bijection de l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E sur l'ensemble des variétés linéaires projectives de $\mathbb{P}(E)$. (L'ensemble vide est une variété linéaire projective).

Exercice 2 Une partie H de $\mathbb{P}(E)$ est un hyperplan projectif si et seulement s'il existe une forme linéaire non nulle $\varphi \in E^*$ telle que $H = \{\pi(x) \in \mathbb{P}(E) \mid \varphi(x) = 0\}$. On dit que $\varphi(x) = 0$ est une équation de H. Deux formes linéaires non nulles φ et ψ définissent le même hyperplan projectif si et seulement s'il existe $\lambda \in K^\times$ tel que $\psi = \lambda\varphi$.

Définition 3 *Si* E *est de dimension finie* $n+1$ *sur* K*, on dit que* $\mathbb{P}(E)$ est de dimension n*. Un espace projectif de dimension 1 (resp. 2) est une droite projective (resp. un plan projectif).*

Exercice 3 Un hyperplan projectif H et une droite projective D non contenue dans H ont un et un seul point d'intersection. En particulier, deux droites projectives distinctes d'un plan projectif ont un et un seul point d'intersection.

Une intersection de variétés linéaires projectives de $\mathbb{P}(E)$ est une variété linéaire projective. Ceci justifie la définition suivante.

Définition 4 *Soit* A *une partie d'un espace projectif* $\mathbb{P}(E)$*. La* variété linéaire projective engendrée par A *est la plus petite variété linéaire projective de* $\mathbb{P}(E)$ *contenant* A*.*

Exercice 4 Deux points distincts de $\mathbb{P}(E)$ engendrent une droite projective. On notera MN la droite engendrée par les points M et N.

On note $\mathbb{P}_n(K)$ l'espace projectif $\mathbb{P}(K^{n+1})$ de dimension n. Si $(x_1,\ldots,x_{n+1}) \in K^{n+1}\setminus\{0\}$, on note

$$(x_1:\ldots:x_{n+1}) = \pi(x_1,\ldots,x_{n+1}) \in \mathbb{P}_n(K)\ .$$

Remarquer que $(x_1:\ldots:x_{n+1}) = (y_1:\ldots:y_{n+1})$ si et seulement s'il existe $\lambda \in K^\times$ tel que, pour $i = 1,\ldots,n+1$, $y_i = \lambda x_i$. On dit que $(x_1,\ldots,x_{n+1})$ est un système de coordonnées homogènes de $P \in \mathbb{P}_n(K)$ si $P = (x_1:\ldots:x_{n+1})$. Un système de coordonnées homogènes d'un point est défini à un facteur près. Dans un système de coordonneés homogènes, au moins une des composantes doit être non nulle. On verra plus loin la notion de repère projectif d'un espace projectif $\mathbb{P}(E)$ de dimension n, qui permet de définir des systèmes de coordonnées homogènes des points de $\mathbb{P}(E)$.

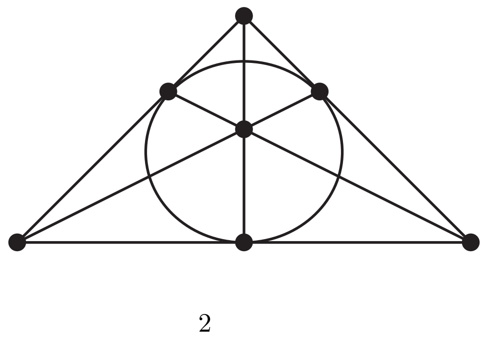
Si $(a_1,\ldots,a_{n+1}) \in K^{n+1}\setminus\{0\}$, l'ensemble des points $(x_1:\ldots:x_{n+1})$ vérifiant l'équation

$$a_1x_1 + \cdots + a_{n+1}x_{n+1} = 0$$

est un hyperplan projectif de $\mathbb{P}_n(K)$, et tout hyperplan projectif s'obtient ainsi. Remarquer que le fait que l'équation soit satisfaite ne dépend pas du choix du système de coordonnées homogènes du point. Il en serait de même pour n'importe quelle équation donnée par un polynôme homogène en $n+1$ variables (cf. [Sam] p. 17).

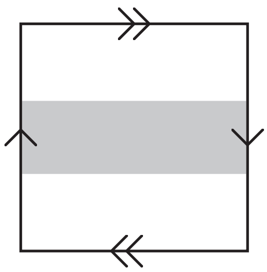
Exercice 5 Si q est une puissance d'un nombre premier et $\mathbb{F}_q$ le corps à q éléments, quel est le nombre d'éléments de $\mathbb{P}_n(\mathbb{F}_q)$? ([Ber] 4.1.3.7, [Sam] p. 17)

Exercice 6 Reconnaître dans le dessin suivant le plan projectif sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, avec ses droites.



L'abscisse projective d'un élément $(x_1 : x_2)$ de la droite projective $\mathbb{P}_1(K)$ est par définition l'élément x_1/x_2 de K si $x_2 \neq 0$, et ∞ si $x_2 = 0$. L'abscisse projective fournit une bijection de $\mathbb{P}_1(K)$ sur $K \cup \{\infty\}$.

Quelques mots très rapides sur la topologie des espaces projectifs, lorsque $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (pour plus de renseignements sur la topologie et la démonstration des affirmations ci-dessous : [Aud] p. 134 et 165, [Leh] p. 322, [Tis] p. 219, [Sam] p. 108, [Ber] 4.3 et [God] p. 38). L'espace $\mathbb{P}_n(K)$ est alors muni de la topologie quotient de celle de $K^{n+1} \setminus \{0\}$ par $\sim$. L'espace $\mathbb{P}_n(K)$ est compact. La droite projective complexe $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ est homéomorphe à la sphère S^2. L'espace projectif réel $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ est homéomorphe au quotient de la sphère S^n de dimension n par l'involution antipodale $x \mapsto -x$ (deux points antipodaux de $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ déterminent la même droite vectorielle de $\mathbb{R}^{n+1}$). En particulier $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ est homéomorphe au cercle S^1. On peut représenter topologiquement le plan projectif réel $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ comme un carré avec les cotés identifiés de la façon indiquée ci dessous (penser à un hémisphère avec l'équateur qui le borde quotienté par l'involution antipodale) :



C'est une surface non-orientable (l'image de la bande grisée dans le quotient est une bande de Moebius).

2 Homographie, groupe projectif

Pour cette section : [Aud] p. 144, [Sam] p. 18, [Ber] 4.5, [Leh] p. 269, [Mar] p.48, [Tis] p. 155.

Soit $f : E \to F$ une application linéaire *injective*. Sa restriction à $E \setminus \{0\}$ est à valeurs dans $F \setminus \{0\}$. Si x et y sont deux éléments non nuls de E, $x \sim y$ entraîne $f(x) \sim f(y)$. Donc f induit une application $\mathbb{P}(f) : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(F)$, définie par $\mathbb{P}(f)(\pi_E(x)) = \pi_F(f(x))$, pour tout $x \in E \setminus \{0\}$.

Définition 5 *L'application $\mathbb{P}(f) : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(F)$ s'appelle* l'application projective *(ou* homographie*) associée à l'application linéaire injective $f : E \to F$.*

Remarquer qu'une homographie est toujours injective. Si E est de dimension finie, une homographie de $\mathbb{P}(E)$ est l'application projective associée à un automorphisme linéaire de E ; une homographie de $\mathbb{P}(E)$ est une bijection. A noter que d'habitude, le nom d'homographie est réservé aux applications projectives bijectives ; le libellé du programme semble aller contre cette habitude.

Exercice 7 L'image d'une variété linéaire projective de dimension finie par une homographie est une variété linéaire projective de même dimension.

Proposition 6 *Deux applications linéaires injectives f et g de E dans F induisent la même homographie si et seulement s'il existe $\lambda \in K^\times$ tel que $g = \lambda f$.*

Exercice 8 Démontrer la proposition précédente (cf. [Aud] p. 145, [Sam] p. 18, [Tis] p. 155).

La composée de deux homographies est une homographie. On a $\mathbb{P}(f) \circ \mathbb{P}(g) = \mathbb{P}(f \circ g)$. Les homographies d'un espace projectif de dimension finie $\mathbb{P}(E)$ forment un groupe, appelé *groupe projectif de* $\mathbb{P}(E)$. D'après la Proposition 6, ce groupe est isomorphe au quotient du groupe linéaire $\mathrm{GL}(E)$ par $K^\times$ (considéré comme sous-groupe des homothéties de rapport $\neq 0$) ; on note $\mathrm{PGL}(E)$ ce groupe quotient. En particulier, le groupe projectif de $\mathbb{P}_n(K)$ est isomorphe au groupe $\mathrm{PGL}_{n+1}(K)$ quotient de $\mathrm{GL}_{n+1}(K)$ par $K^\times$, considéré comme sous-groupe des matrices scalaires inversibles.

Spécialisons les notions introduites dans le cas de la droite projective $\mathbb{P}_1(K)$. Une homographie de $\mathbb{P}_1(K)$ est induite par une matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(K) \, .$$

Si z est l'abscisse projective d'un point de $\mathbb{P}_1(K)$, l'abscisse projective de son image par l'homographie $\mathbb{P}(A)$ est

$$\frac{az+b}{cz+d} \quad \left(\frac{a}{b} \text{ si } z = \infty \ , \ \infty \text{ si } z = -\frac{d}{c} \right) .$$

Signalons que les applications (pas définies sur l'espace projectif tout entier) induites par des applications linéaires non injectives peuvent présenter un intérêt en géométrie projective. En particulier, si $E = F \oplus G$, la projection sur G parallèlement à F induit par passage au quotient une application $p : \mathbb{P}(E) \setminus \mathbb{P}(F) \to \mathbb{P}(G)$, appelée *projection sur* $\mathbb{P}(G)$ *de centre* $\mathbb{P}(F)$.

Exercice 9 1) On suppose $\mathbb{P}(E)$ de dimension n. Soient $\mathbb{P}(F)$ et $\mathbb{P}(G)$ des variétés linéaires projectives de dimension d et $n-d-1$ respectivement. Montrer que $E = F \oplus G$ si et seulement si $\mathbb{P}(F) \cap \mathbb{P}(G) = \emptyset$.

2) Montrer qu'alors la projection p sur $\mathbb{P}(G)$ de centre $\mathbb{P}(F)$ a la description géométrique suivante : pour tout point M de $\mathbb{P}(E) \setminus \mathbb{P}(F)$, $p(M)$ est l'unique point d'intersection de la variété linéaire projective engendrée par $\mathbb{P}(F) \cup \{M\}$ avec $\mathbb{P}(G)$.

L'exercice précédent s'applique en particulier au cas où $\mathbb{P}(F)$ est réduit à un point C et $\mathbb{P}(G)$ est un hyperplan projectif H ne contenant pas C. La projection sur H de centre C est l'application qui à tout point $M \neq C$ de $\mathbb{P}(E)$ fait correspondre le point d'intersection de la droite projective CM avec H.

La géométrie projective s'est développée à partir de l'étude des propriétés invariantes par de telles projections centrales : c'est de là que vient le nom de "projectif". Pour les projections centrales (et les problèmes liés à la notion de perspective), on peut voir [Ber] 4.7, [Tis] p. 139, et surtout [Leh] chap. 5.

Exercice 10 Soit L un autre hyperplan projectif ne contenant pas C. Montrer que la restriction à L de la projection sur H de centre C est une homographie (bijective) de L sur H.

3 Repère projectif, coordonnées homogènes

Pour cette section, voir [Aud] p. 145, [Sam] p. 15, [Ber] 4.4, [Leh] p. 270, [Mar] p.52, [Tis] p. 153 (la numérotation des points dans un repère projectif varie suivant les auteurs).

Définition 7 *On dit que* $d+1$ points d'un espace projectif sont projectivement indépendants *s'ils engendrent une variété linéaire projective de dimension* d.

Exercice 11 Les points $\pi(v_1), \ldots, \pi(v_k)$ de $\mathbb{P}(E)$ sont projectivement indépendants si et seulement si la famille $(v_1, \ldots, v_k)$ est libre dans E.

Exercice 12 Une homographie transforme des points projectivement indépendants en points projectivement indépendants.

Si on se donne $n+1$ points projectivement indépendants $P_1, \ldots, P_{n+1}$ d'un espace projectif $\mathbb{P}(E)$ de dimension n, on peut les relever en une base $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ de E (c.-à-d. que $\pi(e_i) = P_i$). Mais si on choisit des éléments quelconques $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ dans $K^\times$, alors $(\lambda_1 e_1, \ldots, \lambda_{n+1} e_{n+1})$ est aussi une base de E telle que $\pi(\lambda_i e_i) = P_i$. Le théorème suivant indique un moyen de déterminer une base de E à homothétie près.

Théorème 8 *Soient* $P_1, \ldots, P_{n+2}$ $n+2$ *points d'un espace projectif* $\mathbb{P}(E)$ *de dimension* n. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *Il existe une base* $(e_1, \ldots, e_n, e_{n+1})$ *de* E *telle que*

$$\pi(e_i) = P_i \quad \textit{pour } i = 1, \ldots, n+1$$
$$\pi(e_1 + \cdots + e_{n+1}) = P_{n+2} \ .$$

(ii) $n+1$ *quelconques d'entre les points* $P_1, \ldots, P_{n+2}$ *sont projectivement indépendants.*

De plus, si ces propriétés sont vérifiées et si $(f_1, \ldots, f_{n+1})$ *est une autre base de* E *telle que*

$$\pi(f_i) = P_i \quad \textit{pour } i = 1, \ldots, n+1$$
$$\pi(f_1 + \cdots + f_{n+1}) = P_{n+2} \ ,$$

alors il existe un unique scalaire $\lambda \in K^\times$ *tel que, pour tout* $i = 1, \ldots, n+1$, $f_i = \lambda e_i$.

Démonstration: L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est évidente. Supposons (ii) vérifié. On peut relever $P_1, \ldots, P_{n+1}$ en une base $(e'_1, \ldots, e'_{n+1})$ de E. Soit $v = \mu_1 e'_1 + \cdots + \mu_{n+1} e'_{n+1} \in E$ tel que $\pi(v) = P_{n+2}$. La propriété (ii) entraîne qu'aucun des μ_i n'est nul. On pose alors $e_i = \mu_i^{-1} e'_i$ pour $i = 1, \ldots, n+1$.

Soit maintenant $(f_1, \ldots, f_{n+1})$ une autre base comme dans l'énoncé. Puisque $\pi(f_i) = \pi(e_i)$, il existe $\lambda_i \in K^\times$ tel que $f_i = \lambda_i e_i$. Puisque $\pi(\sum_{i=1}^{n+1} f_i) = \pi(\sum_{i=1}^{n+1} e_i)$, il existe $\lambda \in K^\times$ tel que $\sum_{i=1}^{n+1} f_i = \lambda \sum_{i=1}^{n+1} e_i$. On en déduit $\lambda = \lambda_1 = \ldots = \lambda_{n+1}$. ◫

Définition 9 *Une famille $(P_1, \ldots, P_{n+2})$ de $n+2$ points d'un espace projectif $\mathbb{P}(E)$ de dimension n vérifiant les conditions équivalentes du théorème 8 s'appelle un* repère projectif de $\mathbb{P}(E)$.

Exercice 13 Toute famille de points projectivement indépendants d'un espace projectif de dimension finie se complète en un repère projectif de cet espace.

Théorème 10 *Soient $\mathbb{P}(E)$ et $\mathbb{P}(F)$ deux espaces projectifs de dimension n, $(P_1, \ldots, P_{n+2})$ (resp. $(Q_1, \ldots, Q_{n+2})$) un repère projectif de $\mathbb{P}(E)$ (resp. $\mathbb{P}(F)$). Il existe une unique homographie $h = \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(F)$ telle que, pour tout $i = 1, \ldots, n+2$, on a $h(P_i) = Q_i$.*

Démonstration: Choisissons des bases $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ de E et $(f_1, \ldots, f_{n+1})$ de F telles que $\pi_E(e_i) = P_i$ et $\pi_F(f_i) = Q_i$ pour $i = 1, \ldots, n+1$, $\pi_E(\sum_{i=1}^{n+1} e_i) = P_{n+2}$ et $\pi_F(\sum_{i=1}^{n+1} f_i) = Q_{n+2}$. Soit $u : E \to F$ l'isomorphisme linéaire défini par $u(e_i) = f_i$ pour $i = 1, \ldots, n+1$. Alors $h = \mathbb{P}(u)$ est une homographie qui satisfait $h(P_i) = Q_i$ pour $i = 1, \ldots, n+2$. Soit $\mathbb{P}(v)$ une autre homographie qui envoie chaque P_i sur Q_i. On a $\pi_F(v(e_i)) = Q_i$ pour $i = 1, \ldots, n+1$ et $\pi_F(v(\sum_{i=1}^{n+1} e_i)) = Q_{n+2}$. D'après le théorème 8, on en déduit qu'il existe $\lambda \in K^\times$ tel que, pour tout $i = 1, \ldots, n+1$, $v(e_i) = \lambda f_i$. Donc $v = \lambda u$ et $\mathbb{P}(v) = h$. ◫

Exercice 14 Le groupe des homographies de $\mathbb{P}(E)$ agit de façon transitive sur l'ensemble des hyperplans projectifs.

Exercice 15 . Montrer que $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ est isomorphe au groupe symétrique $\mathcal{S}_4$.

Corollaire 11 *Soit $\mathcal{R} = (P_1, \ldots, P_{n+2})$ un repère projectif d'un espace projectif $\mathbb{P}(E)$ de dimension n. Il existe une unique homographie $h_\mathcal{R} : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}_n(K)$ telle que*

$$\begin{array}{rcl} h_\mathcal{R}(P_1) & = & (1:0:0:\ldots:0) \\ h_\mathcal{R}(P_2) & = & (0:1:0:\ldots:0) \\ & \vdots & \\ h_\mathcal{R}(P_{n+1}) & = & (0:0:\ldots:0:1) \\ h_\mathcal{R}(P_{n+2}) & = & (1:1:\ldots:1:1) \end{array}$$

Si $h_\mathcal{R}(P) = (x_1 : \ldots : x_{n+1})$, on appelle $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ un système de coordonnées homogènes de P dans le repère $\mathcal{R}$.

Remarquer qu'un système de coordonnées homogènes d'un point dans un repère projectif est défini à un facteur près. Un système de coordonnées homogènes d'un point de $\mathbb{P}_n(K)$ est un système de coordonnées homogènes dans le "repère canonique" formé des points

$$(1:0:\ldots:0), \ldots, (0:\ldots:0:1), (1:1:\ldots:1) .$$

4 Liaison affine-projectif

On se limite à la dimension finie. Pour cette section, voir [Aud] p. 137, [Sam] p. 20, [Ber] 5.0-3, [Leh] p.278 et p. 295, [Mar] chap. 3, [Tis] p. 156. Commençons par traiter la complétion projective de l'espace affine K^n. L'application

$$\begin{array}{rcl} \iota : K^n & \longrightarrow & \mathbb{P}_n(K) \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & (x_1 : \ldots : x_n : 1) \end{array}$$

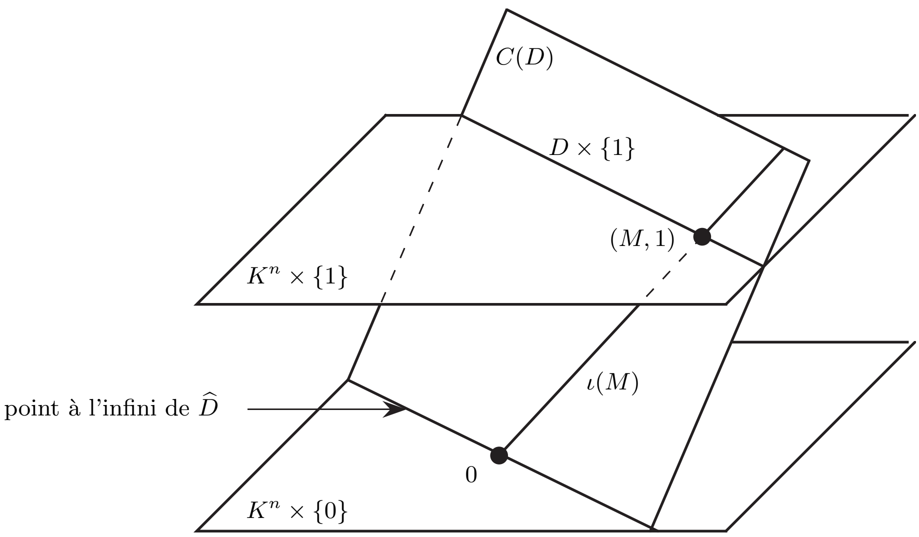
induit une bijection de K^n sur le complémentaire dans $\mathbb{P}_n(K)$ de l'hyperplan projectif d'équation $x_{n+1} = 0$ ("*hyperplan à l'infini*", que l'on notera H_∞). La bijection réciproque envoie $(x_1 : \ldots : x_{n+1})$ (avec $x_{n+1} \neq 0$) sur $(x_1/x_{n+1}, \ldots, x_n/x_{n+1})$. On peut ainsi voir $\mathbb{P}_n(K)$ comme la réunion de (l'image par ι de) K^n et de l'hyperplan H_∞, ce qui généralise l'identification de $\mathbb{P}_1(K)$ à $K \cup \{\infty\}$.

Géométriquement, l'image par ι du point M de K^n est la droite vectorielle de K^{n+1} contenant le point $(M, 1)$ de $K^n \times \{1\}$. Soit A un sous-espace affine de K^n. Soit $C(A)$ le sous-espace vectoriel de K^{n+1} engendré par $A \times \{1\}$. Le *complété projectif* de A est la variété linéaire projective $\widehat{A} = \mathbb{P}(C(A))$ de $\mathbb{P}_n(K)$. En particulier, $\mathbb{P}_n(K)$ est le complété projectif de K^n.

Exercice 16 $\widehat{A}$ est une variété linéaire projective de dimension $\dim(A)$. On a $\widehat{A} = \iota(A) \cup (\widehat{A} \cap H_\infty)$. L'application $A \mapsto \widehat{A}$ est une bijection de l'ensemble des sous-espaces affines de K^n sur l'ensemble des variétés linéaires projectives de $\mathbb{P}_n(K)$ qui ne sont pas contenues dans l'hyperplan H_∞. La bijection réciproque est définie par $L \mapsto \iota^{-1}(L)$.

Exercice 17 Si $A \subset K^n$ est l'hyperplan affine d'équation $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a_{n+1} = 0$, son complété projectif est l'hyperplan d'équation $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a_{n+1}x_{n+1} = 0$.

Si $D \subset K^n$ est une droite affine, alors $\widehat{D}$ est la réunion de $\iota(D)$ et du point d'intersection de $\widehat{D}$ avec H_∞ (point à l'infini de $\widehat{D}$). Les droites D et D' sont parallèles si et seulement si les points à l'infini de $\widehat{D}$ et $\widehat{D'}$ coincident. Donc, l'application $D \mapsto \widehat{D} \cap H_\infty$ induit une bijection entre l'ensemble des directions de droites de K^n et l'hyperplan à l'infini H_∞.



On peut voir l'espace projectif $\mathbb{P}_n(K)$ comme la réunion de l'espace affine K^n avec un hyperplan à l'infini qui est l'ensemble des directions de droites de K^n. Le complété projectif d'un sous-espace affine A s'obtient en ajoutant à A les points (à l'infini) correspondant aux directions de droites parallèles à A.

Le théorème suivant montre que toute transformation affine de K^n s'étend en une unique homographie du complété projectif $\mathbb{P}_n(K)$, qui laisse globalement invariant l'hyperplan à l'infini H_∞ (on identifie K^n à $\mathbb{P}_n(K) \setminus H_\infty$ par ι). Toute homographie laissant globalement invariant l'hyperplan à l'infini s'obtient de cette manière.

Théorème 12 *L'application $h \mapsto h|_{K^n}$ est un isomorphisme du sous-groupe des homographies de $\mathbb{P}_n(K)$ laissant globalement invariant l'hyperplan à l'infini H_∞ sur le groupe affine de K^n.*

Démonstration: Une matrice M de $GL_{n+1}(K)$ représente une homographie de $\mathbb{P}_n(K)$ laissant globalement invariant l'hyperplan H_∞ d'équation $x_{n+1} = 0$ si et seulement si la dernière ligne de la matrice M est de la forme $(0, \ldots, 0, m_{n+1,n+1})$, avec $m_{n+1,n+1} \neq 0$. La matrice $m_{n+1,n+1}^{-1}M$ représente la même homographie et a pour dernière ligne $(0, \ldots, 0, 1)$. A partir de cette remarque, on voit facilement que le morphisme canonique $GL_{n+1}(K) \to PGL_{n+1}(K)$ induit un isomorphisme entre le sous-groupe de $GL_{n+1}(K)$ des matrices de la forme

$$\left(\begin{array}{c|c} & b_1 \\ A & \vdots \\ & b_n \\ \hline 0\dots0 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{où } A \in GL_n(K)\ ,$$

sur le sous-groupe des homographies laissant H_∞ globalement invariant. Pour conclure, on remarque que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX+B \\ 1 \end{pmatrix}\ , \quad \text{où } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\ ,$$

et que le groupe affine de K^n est bien le groupe des transformations $X \longmapsto AX + B$, avec $A \in GL_n(K)$. ◫

Etant donné un espace projectif $\mathbb{P}(E)$ de dimension n et un hyperplan projectif $H = \mathbb{P}(F)$ de cet espace, on peut munir $\mathbb{P}(E) \setminus H$ d'une structure d'espace affine de la manière suivante [Tis]. On choisit une forme linéaire non nulle $\varphi : E \to K$ telle que $\varphi(x) = 0$ soit une équation de H (cf. exercice 2). Alors $A = \varphi^{-1}(1)$ est un hyperplan affine de E, de direction $F = \varphi^{-1}(0)$. L'application $\pi : E \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(E)$ induit une bijection de A sur $\mathbb{P}(E)\setminus H$ (le démontrer). Par transport de structure, on obtient sur $\mathbb{P}(E)\setminus H$ une structure de K-espace affine. Précisément, cette structure est donnée par l'action

$$\Phi : F \times (\mathbb{P}(E) \setminus H) \longrightarrow \mathbb{P}(E) \setminus H$$

définie par $\Phi(x, M) = \pi_E(x + y)$, où y est l'unique élément de A tel que $\pi_E(y) = M$.

Remarquer que la construction ci-dessus, appliquée à $\mathbb{P}_n(K)$ et son hyperplan H_∞ d'équation $x_{n+1} = 0$ donne bien sur $\mathbb{P}_n(K) \setminus H_\infty$ la structure affine venant de l'identification de K^n à $\mathbb{P}_n(K) \setminus H_\infty$ via ι.

Si on choisit une autre équation $\psi(x) = 0$ de H, alors $\psi = \lambda\varphi$ avec $\lambda \in K^\times$; on obtient une structure affine sur $\mathbb{P}(E)\setminus H$ par l'action $\Psi : F \times (\mathbb{P}(E)\setminus H) \to \mathbb{P}(E)\setminus H$ définie cette fois-ci par $\Psi(x, M) = \pi_E(x+z)$, où z est l'unique élément de $\psi^{-1}(1) = \varphi^{-1}(1/\lambda)$ tel que $\pi_E(z) = M$. Les deux actions Φ et Ψ ne sont pas identiques, mais on a $\Phi(\lambda x, M) = \Psi(x, M)$, et l'application identité $\mathrm{Id}_{\mathbb{P}(E)\setminus H}$ est un isomorphisme affine de $(\mathbb{P}(E) \setminus H, F, \Phi)$ sur $(\mathbb{P}(E) \setminus H, F, \Psi)$.

On peut éviter ce problème et définir une structure affine canonique (ne dépendant pas de choix) comme dans [Ber], au prix d'une plus grand sophistication. On fait agir l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E/F, F)$ des applications linéaires du quotient E/F dans F de la manière suivante :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}(E/F, F) \times (\mathbb{P}(E) \setminus H) & \longrightarrow & \mathbb{P}(E) \setminus H \\ (\xi, \pi_E(x)) & \longmapsto & \pi_E(\xi(\overline{x}) + x)\ , \end{array}$$

où $\overline{x}$ désigne la classe de x dans E/F. On pourra vérifier que l'identité de $\mathbb{P}(E) \setminus H$ est bien un isomorphisme affine de cette nouvelle structure avec celle définie par Φ (expliciter l'isomorphisme linéaire $\mathcal{L}(E/F, F) \to F$ induit).

Exercice 18 Soit $\mathbb{P}(E)$ (resp. $\mathbb{P}(E')$) un espace projectif de dimension n sur K, H (resp. H') un hyperplan projectif. Une homographie de $\mathbb{P}(E)$ sur $\mathbb{P}(E')$ envoyant H sur H' induit une bijection affine de $\mathbb{P}(E) \setminus H$ sur $\mathbb{P}(E') \setminus H'$. Toute bijection affine de $\mathbb{P}(E) \setminus H$ sur $\mathbb{P}(E') \setminus H'$ se prolonge de manière unique en une homographie de $\mathbb{P}(E)$ sur $\mathbb{P}(E')$.

Si A est un espace affine quelconque de dimension n sur K, un complété projectif de A est un espace projectif $\mathbb{P}(E)$ muni d'un hyperplan H et d'une bijection affine de A sur $\mathbb{P}(E)\setminus H$. On peut en construire en choisissant un repère affine de A, pour se ramener à K^n. Le résultat de l'exercice précédent montre que le complété projectif est unique, à homographie unique près.

On peut trouver la complétion projective abordée de manière intrinsèque (sans passer par des repères) dans [Ber], 5.1, [Sam] p. 22. L'idée est de construire un espace vectoriel E de dimension $n+1$, une forme linéaire non nulle $\varphi : E \to K$ et une bijection affine qui permet d'identifier A à $\varphi^{-1}(1)$. On prend alors $\mathbb{P}(E)$ comme complété projectif de A.

Le point vraiment important est l'isomorphisme du groupe des homographies laissant un hyperplan globalement invariant avec le groupe affine du complémentaire de l'hyperplan.

Exercice 19 Soit A un espace affine de dimension n sur K, $\widehat{A}$ son complété projectif, d'hyperplan à l'infini H (on identifie A à $\widehat{A} \setminus H$). Soient $A_0, \ldots, A_n$ $n+1$ points affinement indépendants de A, et A_{n+1} leur isobarycentre. Vérifier que $A_0, \ldots, A_n, A_{n+1}$ est un repère projectif de $\widehat{A}$. Dans ce repère projectif, H a pour équation $x_0 + \cdots + x_n = 0$, et, si $x_0 + \cdots + x_n \neq 0$, le point $(x_0 : \ldots : x_n)$ est le barycentre des points $A_0, \ldots, A_n$ affectés des poids $x_0, \ldots, x_n$, respectivement. (Il sera commode de réaliser A comme hyperplan $\varphi^{-1}(1)$ d'un espace vectoriel E de dimension $n+1$, avec $\widehat{A} = \mathbb{P}(E)$.)

5 Exemples de propriétés projectives et d'utilisation d'éléments à l'infini

Le procédé général est le suivant : on se donne une figure, disons dans un plan projectif, dont on veut démontrer une propriété. On choisit astucieusement une "droite à l'infini" (ou un repère projectif) pour se ramener à une situation affine simple dans le complémentaire de cette droite à l'infini. Voici deux exemples classiques : Desargues et Pappus. Voir [Aud] p. 140, [Sam] p. 29, [Ber] 5.4 (attention : la condition "s, a, b, c projectivement indépendants" dans l'énoncé de Desargues 5.4.3 exclut le cas plan !), [Leh] p. 128, [Tis] p. 159. Les démonstrations de Pappus dans [Leh] (p. 251) et de Desargues dans [Tis] (p. 161) ne se font pas par envoi d'éléments à l'infini.

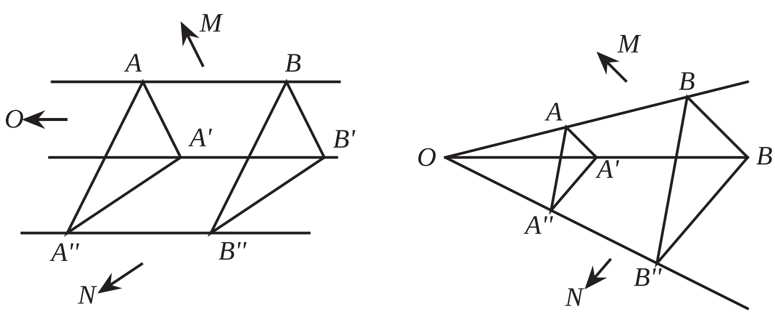
Théorème 13 (Desargues) *Dans un plan projectif, on se donne trois droites distinctes D, D' et D'' concourantes au point O. Soient A et B (resp. A' et B', resp. A'' et B'') deux points distincts appartenant à D (resp. D', resp D'') et différents de O. Soit M (resp. N, resp. P) le point d'intersection des droites AA' et BB' (resp $A'A''$ et $B'B''$, resp. $A''A$ et $B''B$). Alors M, N et P sont alignés.*

Démonstration: Remarquer que les hypothèses faites entraînent que les droites AA' et BB' sont distinctes et donc que M est bien défini (de même pour N et P). On peut supposer que ni A, A', A'' ni B, B', B'' ne sont alignés (si par exemple A, A', A'' sont alignés sur une droite Δ, alors M, N, P sont sur Δ). Alors les points M, N, P sont distincts, et la droite MN ne contient aucun des points A, A', A'', B, B', B'' (si MN contenait un des points A, A', A'', elle contiendrait les deux autres).

Prenons la droite MN comme droite de l'infini. Dans le plan affine complémentaire de MN, on a $AA' \parallel BB'$ et $A'A'' \parallel B'B''$.

Si $O \in MN$, les trois droites affines AB, $A'B'$ et $A''B''$ sont parallèles. La translation qui envoie A sur B envoie le triangle $AA'A''$ sur $BB'B''$ (règle du parallélogramme), et donc $A''A \parallel B''B$.

Si $O \notin MN$, les trois droites affines AB, $A'B'$ et $A''B''$ sont concourantes en O. L'homothétie de centre O et de rapport $\overline{OB}/\overline{OA}$ envoie le triangle $AA'A''$ sur $BB'B''$ (théorème de Thalès), et donc $A''A \parallel B''B$.



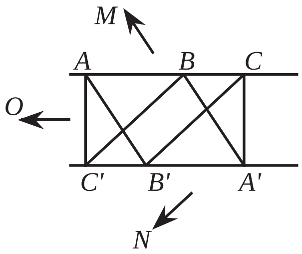
Dans les deux cas, le point d'intersection P des droites projectives $A''A$ et $B''B$ est bien situé sur la droite à l'infini MN. ◻

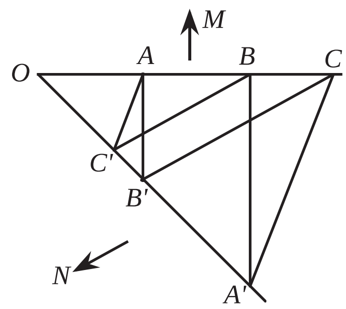
Théorème 14 (Pappus) *Dans un plan projectif, on se donne deux droites distinctes D et D' se coupant en O, trois points A, B, C (resp. A', B', C') appartenant à D (resp. D'), distincts et différents de O. Les trois points $M = AB' \cap A'B$, $N = BC' \cap B'C$ et $P = CA' \cap C'A$ sont alignés.*

Démonstration: Les points M, N et P sont distincts, et aucun des points A, B, C, A', B', C' n'est sur la droite MN. Prenons la droite MN comme droite à l'infini. Dans le plan affine complémentaire de MN, on a $AB' \parallel A'B$ et $BC' \parallel B'C$.

Si $O \in MN$, les droites affines D et D' sont parallèles. Notons f (resp. g) la translation qui envoie A sur B (resp B sur C). Alors $g(f(A)) = C$ et $g(f(C')) = f(g(C')) = f(B') = A'$ (règle du parallélogramme). Donc $CA' \parallel C'A$.

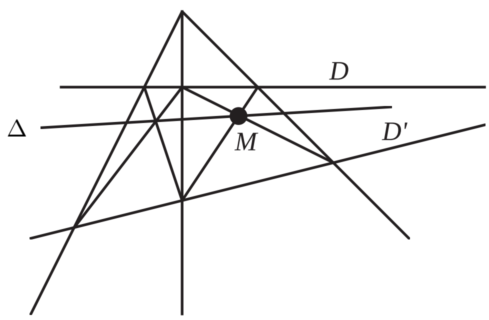
Si $O \notin MN$, les droites affines D et D' se coupent en O. Notons f (resp. g) l'homothétie de centre O qui envoie A sur B (resp B sur C). Alors $g(f(A)) = C$ et $g(f(C')) = f(g(C')) = f(B') = A'$ (commutativité de la multiplication et théorème de Thalès). Donc $CA' \parallel C'A$.





Dans les deux cas, le point d'intersection P des droites projectives CA' et $C'A$ est bien situé sur la droite à l'infini MN. $\square$

Exercice 20 ([Ber], 5.5.4) On dessine sur une feuille deux droites D et D' se coupant en dehors de la feuille, et un point M qui n'est ni sur D ni sur D'. Comment construire la droite qui joint M au point d'intersection de D et D' ? Le dessin suivant donne une solution.



Montrer que D, D' et Δ sont concourantes (choisir astucieusement une droite à l'infini).

6 Théorème fondamental de la géométrie projective

Si σ est un automorphisme du corps K, une application σ-linéaire entre deux K-espaces vectoriels E et E' est un morphisme de groupes additifs f vérifiant $f(\lambda x) = \sigma(\lambda) f(x)$ pour tout $\lambda \in K$ et tout $x \in E$. Si f est une application σ-linéaire bijective de E dans E', elle induit une application bijective $\mathbb{P}(f) : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E')$, qu'on appelle une σ-homographie. Par exemple, une anti-homographie de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ (de la forme $z \mapsto (a\overline{z} + b)/(c\overline{z} + d)$) est une σ-homographie, pour σ la conjugaison.

Une σ-homographie préserve clairement l'alignement.

Théorème 15 *Soient $\mathbb{P}(E)$ et $\mathbb{P}(E')$ deux espaces projectifs de même dimension $n \geq 2$ (sur K). Soit $h : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E')$ une bijection qui transforme points alignés en points alignés. Alors il existe un automorphisme σ de K tel que h soit une σ-homographie.*

En particulier, si $K = \mathbb{R}$, les seules bijections entre espaces projectifs de même dimension supérieure ou égale à 2 qui préservent l'alignement sont les homographies.

Pour la démonstration, voir [Sam] p. 32, [Tis] p. 185, [Ber] 5.4.8. Il y a en fait un "théorème fondamental de la géométrie affine" analogue ([Tis] p. 181, [Ber] 2.6), et le théorème fondamental de la géométrie projective se ramène essentiellement au théorème fondamental de la géométrie affine.

Le "théorème fondamental" de la géométrie projective indique la piste suivante : on peut faire une géométrie projective axiomatique, en définissant par exemple un plan projectif comme un ensemble muni d'une famille de sous-ensembles (les droites) vérifiant des conditions d'incidence (par deux points distincts il passe une unique droite, deux droites distinctes ont un unique point d'intersection), et certaines propriétés (comme Desargues, Pappus, ...). On peut ensuite reconstruire un corps K à partir de cette géométrie (par exemple, la démonstration de Pappus indique un lien avec la commutativité de la multiplication). Pour une réalisation de ce programme, voir [Sam] p. 35 et [Art], chapitre 2 (plutôt dans le cadre affine).

On peut trouver une analogie entre le théorème fondamental de la géométrie projective et la caractérisation du groupe circulaire, qui dit qu'une transformation bijective de la sphère de Riemann $\mathbb{C} \cup \infty$ qui préserve la famille des cercles et droites est une homographie ou une anti-homographie. Mais ce parallèle amène une question troublante : une homographie de la sphère de Riemann peut transformer une droite en cercle. Or on a dit (exercice 7) qu'une homographie transforme variété linéaire projective en variété linéaire projective de même dimension, et donc transforme toujours une droite en droite ! En fait, il faut bien distinguer deux situations :

1) Une homographie de la sphère de Riemann est une homographie de la *droite projective complexe* $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \infty$, complété projectif de la droite affine $\mathbb{C}$. La seule droite projective de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ est $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ lui-même !

2) Quand on parle de droites et de cercles dans $\mathbb{C}$, on considère $\mathbb{C}$ comme un plan affine euclidien réel. Le complété projectif *en tant que plan affine réel* est $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, il s'obtient en ajoutant une droite de points à l'infini : ce n'est pas la sphère de Riemann. Une homographie de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ transforme bien une droite réelle en droite réelle.

Le jeu entre ces deux notions apparaît (ou plutôt, est caché) dans la démonstration de la caractérisation du groupe circulaire donnée dans [Del], p. 330, qui utilise le théorème fondamental de la géométrie affine.

7 Dualité

Pour cette section : [Aud] p. 142, [Sam] p. 49, [Mar] p.64, [Tis] p. 166. La dualité dans [Leh] est abordée du point de vue de la "transformation par polaires réciproques", dont nous ne parlons pas ici.

Nous avons vu (Exercice 2) qu'un hyperplan projectif de $\mathbb{P}(E)$ (resp. un hyperplan vectoriel de E) est de la forme $\mathbb{P}(\ker(\varphi))$ (resp. $\ker(\varphi)$) pour une forme linéaire non nulle $\varphi \in E^*$, et que deux formes linéaires non nulles φ et ψ définissent le même hyperplan projectif de $\mathbb{P}(E)$ (resp. le même hyperplan vectoriel de E) si et seulement s'il existe $\lambda \in K^\times$ tel que $\psi = \lambda\varphi$.

On conclut donc que l'application $\pi_{E^*}(\varphi) \mapsto \mathbb{P}(\ker(\varphi))$ est une bijection de l'espace projectif $\mathbb{P}(E^*)$ sur l'ensemble des hyperplans projectifs de $\mathbb{P}(E)$.

Définition 16 *On appelle* $\mathbb{P}(E^*)$ l'espace projectif dual de $\mathbb{P}(E)$. *Il s'identifie canoniquement à l'ensemble des hyperplans projectifs de* $\mathbb{P}(E)$.

Soit $P = \pi_E(x)$ un point de $\mathbb{P}(E)$, $H = \mathbb{P}(\ker(\varphi))$ un hyperplan de $\mathbb{P}(E)$ que l'on identifie au point $\pi_{E^*}(\varphi)$ de $\mathbb{P}(E^*)$. On a $P \in H$ si et seulement si $\varphi(x) = 0$.

Exercice 21 (cf. [Sam], p. 50) On suppose E de dimension finie $n+1$. Si F (resp. V) un sous-espace vectoriel de E (resp. E^*). On note

$$\begin{aligned} F^\perp &= \{\varphi \in E^* \mid \forall x \in F\ \varphi(x) = 0\}\ , \\ V^\perp &= \{x \in E \mid \forall \varphi \in V\ \varphi(x) = 0\}\ . \end{aligned}$$

On rappelle que $F^\perp$ (resp $V^\perp$) est un sous-espace vectoriel de dimension $\dim(E) - \dim(F)$ (resp $\dim(E^*) - \dim(V)$), et que $(F^\perp)^\perp = F$ (resp $(V^\perp)^\perp = V$). L'espace projectif $\mathbb{P}(E)$ et son dual

$\mathbb{P}(E^*)$ sont de dimension n. Si $\mathbb{P}(F)$ une variété linéaire projective de dimension d de $\mathbb{P}(E)$, alors $\mathbb{P}(F^\perp)$ est une variété linéaire projective de dimension $n-d-1$ de l'espace projectif dual. Montrer que (en identifiant toujours un point H de $\mathbb{P}(E^*)$ à un hyperplan de $\mathbb{P}(E)$) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F^\perp) &= \{H \in \mathbb{P}(E^*) \mid \mathbb{P}(F) \subset H\} , \\ \mathbb{P}(V^\perp) &= \bigcap_{H\in\mathbb{P}(V)} H .\end{aligned}$$

Regardons de plus près ce qui se passe quand $\mathbb{P}(E)$ est un plan projectif. Les hyperplans de $\mathbb{P}(E)$ sont les droites projectives, et on identifie donc un point de $\mathbb{P}(E^*)$ à une droite de $\mathbb{P}(E)$.

Définition 17 *Soit $\mathbb{P}(E)$ un plan projectif. Une droite projective du plan projectif dual $\mathbb{P}(E^*)$ s'appelle un* faisceau linéaire de droites de $\mathbb{P}(E)$. *Si P est un point de $\mathbb{P}(E)$, l'ensemble des droites projectives de $\mathbb{P}(E)$ passant par P est un faisceau linéaire. On dit que P est le* point base *de ce faisceau. Tout faisceau linéaire de droites s'obtient ainsi.*

Exercice 22 Vérifier les assertions contenues dans la définition.

Un faisceau linéaire de droites est déterminé par deux droites distinctes.

Exercice 23 On est dans $\mathbb{P}_2(K)$ (ou on s'y ramène en choisissant un repère projectif). Soient D et D' deux droites projectives distinctes, d'équations respectivement

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \quad \text{et} \quad a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 = 0 .$$

Soit L le faisceau linéaire engendré par D et D'. Montrer que l'application qui à $(\lambda : \mu) \in \mathbb{P}_1(K)$ fait correspondre la droite d'équation

$$\lambda(ax_1 + bx_2 + cx_3) + \mu(a'x_1 + b'x_2 + c'x_3) = 0$$

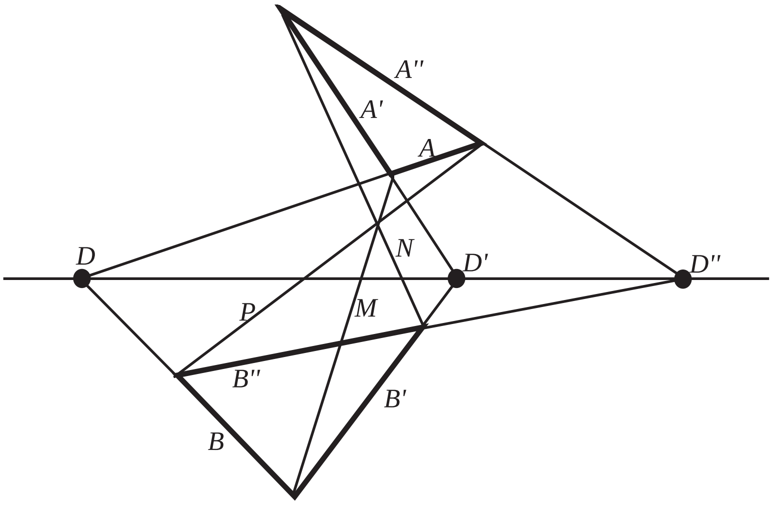
est une homographie de $\mathbb{P}_1(K)$ sur L.

On dispose d'un "dictionnaire" entre un plan projectif et son dual.

$\mathbb{P}(E^*)$	$\mathbb{P}(E)$
point	droite
droite	faisceau linéaire de droites, point (base du faisceau)
point alignés	droites concourantes
droite passant par deux points	point d'intersection de deux droites

L'identification canonique de E à son bidual montre que $\mathbb{P}(E)$ est le plan projectif dual de $\mathbb{P}(E^*)$. Ce dictionnaire fonctionne dans les deux sens. Le mode d'emploi de ce dictionnaire est le suivant : si on a montré un théorème pour les plans projectifs, il s'applique en particulier au plan projectif dual $\mathbb{P}(E^*)$. Le dictionnaire permet de traduire l'énoncé du théorème (pour $\mathbb{P}(E^*)$) en une propriété (automatiquement vraie) du plan $\mathbb{P}(E)$: on obtient ainsi le *théorème dual*.

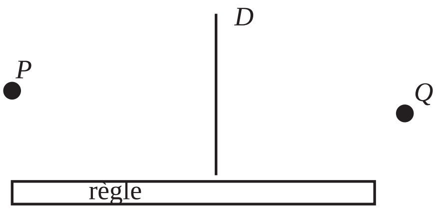
Exemple : le théorème dual de Desargues. Dans un plan projectif, on se donne trois points distincts D, D' et D'' alignés sur une droite O. Soient A et B (resp. A' et B', resp. A'' et B'') deux droites distinctes passant par D (resp. D', resp D'') et différentes de O. Soit M (resp. N, resp. P) la droite qui joint les points $A \cap A'$ et $B \cap B'$ (resp $A' \cap A''$ et $B' \cap B''$, resp. $A'' \cap A$ et $B'' \cap B$). Alors M, N et P sont concourantes.



Exercice 24 Reconnaître dans cet énoncé “la réciproque” du théorème de Desargues (à formuler correctement).

Exercice 25 (cf. [Sam], p. 51) Formuler le théorème dual du théorème de Pappus.

Exercice 26 ([Ber], 5.5.5) On veut tracer la droite joignant deux points donnés P et Q, en disposant d'une règle trop courte. Pour ceci, on trace une droite D “à mi-chemin” entre P et Q, et on essaie de construire le point d'intersection de D avec PQ (sans tracer PQ). Reconnaître dans ce problème le dual du problème de l'Exercice 20, et employer la tactique duale pour le résoudre.



8 Homographies entre droites projectives. Birapport sur une droite projective

Pour cette section, voir [Aud] p. 147 et 149, [Sam] p. 70, [Ber] chap. 6, [Mar] p. 56. Dans [Leh] chap. 8 et [Tis] p.142, on aborde les homographies de droites projectives et le birapport avant la considération des espaces projectifs généraux.

Soit D une droite projective. Un repère projectif de D est un triplet (P_1, P_2, P_3) de points distincts de D. On déduit du théorème 10 :

Théorème 18 *Soient P_1, P_2, P_3 (resp. P_1', P_2', P_3') trois points distincts sur une droite projective D (resp. D'). Il existe une unique homographie $h : D \to D'$ telle que $h(P_i) = Q_i$ pour $i = 1, 2, 3$.*

En particulier, le groupe des homographies d'une droite projective D agit de façon simplement transitive sur l'ensemble des triplets de points distincts de D.

Nous utilisons maintenant l'identification de $\mathbb{P}_1(K)$ à $K \cup \{\infty\}$ donnée par l'abscisse projective. Moyennant cette identification, le repère canonique de $\mathbb{P}_1(K)$ est $(\infty, 0, 1)$.

Définition 19 *Soient P_1, P_2, P_3, P_4 quatre points d'une droite projective D, les trois premiers étant distincts. Le birapport $[P_1, P_2, P_3, P_4]$ est (l'abscisse projective de) l'image de P_4 par l'unique homographie $D \to \mathbb{P}_1(K)$ qui envoie P_1 sur ∞, P_2 sur 0 et P_3 sur 1.*

L'importance du birapport en géométrie projective vient du fait qu'il est invariant par homographie.

Exercice 27 Une injection de la droite projective D dans la droite projective D' est une homographie si et seulement si elle préserve le birapport.

Exercice 28 Si a, b, c, d sont les affixes projectives de quatre points distincts de $\mathbb{P}_1(K)$, retrouver l'expression

$$\frac{c-a}{c-b} \Big/ \frac{d-a}{d-b}$$

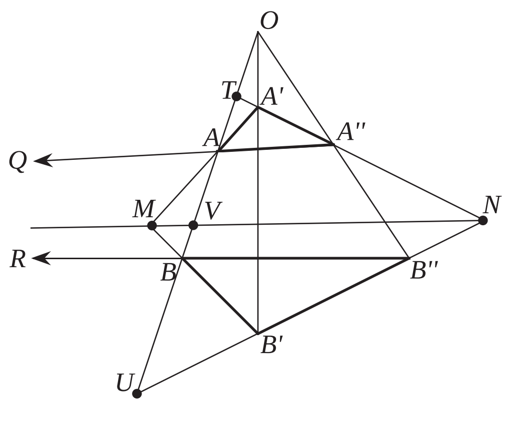
pour le birapport (commencer par déterminer l'homographie qui envoie a, b, c sur $\infty, 0, 1$).

Exercice 29 Dans un plan projectif, on se donne quatre droites distinctes D_1, D_2, D_3, D_4 passant par un point O. Soient Δ et Δ' deux droites ne passant pas par O. Soit M_i (resp. M_i') le point d'intersection de D_i et de Δ (resp. Δ'), pour $i = 1, \ldots, 4$. Montrer que $[M_1, M_2, M_3, M_4] = [M_1', M_2', M_3', M_4']$
– en utilisant des éléments à l'infini,
– en utilisant une projection centrale (cf. exercice 10).

L'exercice précédent permet de définir le *birapport de quatre droites d'un faisceau* comme le birapport des quatre points d'intersection avec une droite quelconque n'appartenant pas au faisceau. Mais une autre définition naturelle du birapport de quatre droites d'un faisceau vient de ce que ce faisceau est une droite projective du plan projectif dual. Ceci donne bien le même birapport, comme le montre l'exercice suivant.

Exercice 30 Dans un plan projectif, soit L un faisceau linéaire de droites et Δ une droite n'appartenant pas au faisceau. L'application qui à $D \in L$ fait correspondre le point d'intersection de D et Δ est une homographie de L sur Δ.

Exercice 31 Une autre démonstration de Desargues ([Tis] p. 161). On reprend les notations et les hypothèses du théorème 13, en supposant que ni A, A', A'', ni B, B', B'' ne sont alignés. La droite MN coupe les droites AB, AA'' et BB'' en V, Q et R, respectivement.



Montrer $[M, N, V, Q] = [M, N, V, R]$. Conclure.

Exercice 32 ([Leh], p. 249). Soient D et D' deux droites distinctes d'un plan projectif, S le point d'intersection de D et D'. Soit A (resp. A') un point appartenant à D (resp. D'), distinct de S. Soit X une droite ne passant ni par A ni par A'. A tout point M de D on associe le point $M' = h(M)$ tel que AM' et $A'M$ coupent X au même point. Montrer que h est une homographie de D sur D'.

On peut voir ([Leh], p. 250) que toute homographie h de D sur D' s'obtient par le procédé ci dessus à partir d'un couple (A, A') et d'une droite X. La droite X est uniquement déterminée par h. On peut en déduire le théorème de Pappus.

Indications pour les exercices

Exercice 1 Remarquer que $\pi_E^{-1}(\mathbb{P}(F)) = F \setminus \{0\}$.

Exercice 2 Hyperplan vectoriel = noyau d'une forme linéaire non nulle. Deux formes linéaires non nulles ont même noyau si et seulement si l'une est multiple de l'autre par un scalaire non nul.

Exercice 3 Poser $H = \mathbb{P}(F)$, $D = \mathbb{P}(G)$ et vérifier $\mathbb{P}(F \cap G) = \mathbb{P}(F) \cap \mathbb{P}(G)$.

Exercice 4 Deux droites vectorielles distinctes engendrent un plan vectoriel.

Exercice 5 $\dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$.

Exercice 6 Mettre les noms $(1:0:0)$, $(0:1:0)$ et $(0:0:1)$ aux trois sommets du "triangle". Compléter alors avec les noms des autres points, et les équations des sept droites.

Exercice 7 Dimension de $f(F)$ si f est injective, et $\mathbb{P}(f)(\mathbb{P}(F)) = \mathbb{P}(f(F))$.

Exercice 8 Pour tout $x \in E$ non nul, il existe un scalaire λ_x non nul tel que $g(x) = \lambda_x f(x)$. Montrer ensuite que λ_x ne dépend pas de x (considérer $g(x+y)$ si x et y ne sont pas colinéaires).

Exercice 9 1) F de dimension $d+1$ et G de dimension $n-d$ sont supplémentaires dans E si et seulement si $F \cap G = \{0\}$. 2) L'image d'une droite vectorielle M non contenue dans F par la projection sur G parallèlement à F est la droite vectorielle $(F \oplus M) \cap G$.

Exercice 10 Posons $H = \mathbb{P}(G)$, $L = \mathbb{P}(G')$. Si ni G ni G' ne contiennent la droite vectorielle C, la projection sur G parallèlement à C induit un isomorphisme linéaire de G' sur G.

Exercice 11 Les deux propriétés sont équivalentes au fait que $(v_1, \dots, v_k)$ engendre un sous-espace vectoriel de dimension k.

Exercice 12 Une application linéaire injective préserve l'indépendance linéaire.

Exercice 13 Théorème de la base incomplète pour arriver à $n+1$ points formant l'image d'une base, puis ajouter un point image d'un vecteur dont toutes les coordonnées dans cette base sont non nulles.

Exercice 14 $\mathrm{GL}(E)$ agit transitivement sur les hyperplans vectoriels.

Exercice 15 L'action de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ sur la droite projective sur $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ (qui a 4 éléments) fournit un homomorphisme de ce groupe dans $\mathcal{S}_4$. Le théorème 10 entraîne que c'est un isomorphisme.

Exercice 16 Vérifier que $C(A) \cap (K^n \times \{1\}) = A \times \{1\}$ et que, si L est un sous-espace vectoriel de K^{n+1} non contenu dans $K^n \times \{0\}$, il est engendré par $L \cap (K^n \times \{1\})$. Voir aussi que $\dim(C(A)) = \dim(A) + 1$.

Exercice 17 Vérifier que $C(A)$ est bien l'hyperplan vectoriel de K^{n+1} d'équation $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$.

Exercice 18 On peut prendre un repère projectif de $\mathbb{P}(E)$ induisant une homographie $\mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}_n(K)$ envoyant H sur H_∞ : il suffit de prendre les n premiers points du repère dans H. On fait de même pour H'. On est ramené au théorème 12.

Exercice 19 On prend A comme hyperplan affine $\varphi^{-1}(1)$ de E. Alors $A_0, \dots, A_n$ forment une base $\mathcal{B}$ de E et A_{n+1} a pour coordonnées $(\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1})$ dans cette base. Par π_E, ceci nous donne bien un repère projectif. Pour tout vecteur non nul x de E de coordonnées $(x_0, \dots, x_n)$ dans $\mathcal{B}$, $\pi_E(x)$ a $(x_0 : \dots : x_n)$ comme système de coordonnées homogènes dans ce repère projectif. La forme linéaire φ s'écrit $x_0 + \cdots + x_n$ dans la base $\mathcal{B}$, et H a pour équation $\varphi = 0$. Si $x_0 + \cdots + x_n \neq 0$, le barycentre de $(A_0, x_0), \dots, (A_n, x_n)$ a pour coordonnées $x_i/(x_0 + \cdots + x_n)$ dans $\mathcal{B}$. Donc $(x_0 : \dots : x_n)$ est un système de coordonnées homogènes de ce barycentre dans le repère projectif $A_0, \dots, A_{n+1}$ de $\widehat{A}$.

Exercice 20 Prendre pour droite de l'infini celle joignant l'intersection de D et D' et le point de concours de trois droites situé en haut du dessin. Observer deux parallélogrammes.

Exercice 21 Soit φ une forme linéaire non nulle sur E. Alors $\pi_{E^*}(\varphi) \in \mathbb{P}(F^\perp)$ équivaut à $F \subset \ker(\varphi)$. Soit $x \in E$ non nul. Alors $\pi_E(x) \in \mathbb{P}(V^\perp)$ équivaut à $x \in \ker(\varphi)$ pour tout $\varphi \neq 0$ dans V.

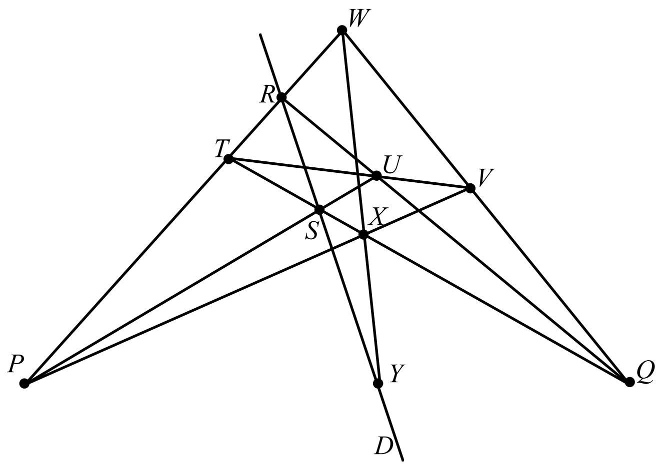
Exercice 22 Si $p = \pi_E(x)$, le faisceau linéaire de droites de point base P est $\mathbb{P}(x^\perp)$. Le point base du faisceau linéaire de droites $\mathbb{P}(V)$ (avec V plan vectoriel dans E^*) est la droite vectorielle $V^\perp$ de E.

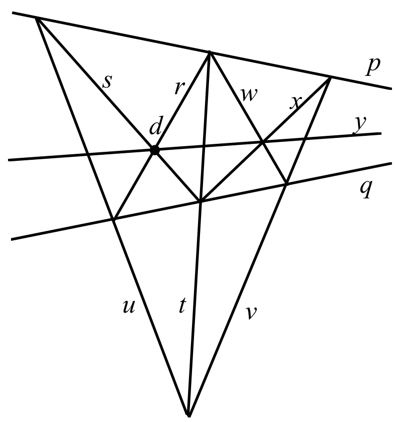
Exercice 23 Posons $L = \mathbb{P}(V)$. Les formes linéaires $\varphi = ax_1 + bx_2 + cx_3$ et $\varphi' = a'x_1 + b'x_2 + c'x_3$ forment une base de V. L'isomorphisme linéaire $K^2 \to V$ défini par $(\lambda, \mu) \mapsto \lambda\varphi + \mu\varphi'$ induit l'homographie de l'énoncé.

Exercice 24 Soient $AA'A$” et $BB'B$” deux triangles, avec $A \neq B$, $A' \neq B'$, A” $\neq B$”. On suppose que les droites AA' et BB' (resp. $A'A$” et $B'B$”, resp. A”A et B”B) sont distinctes et se coupent en M (resp. N, resp. P). Si les points M, N et P sont alignés, alors les droites AB, $A'B'$ et A”B” sont concourantes.

Exercice 25 Soient d et d' deux points distincts dans un plan projectif, o la droite qui les joint. Soient a, b, c (resp. a', b', c') trois droites passant par d (resp. d'), distinctes et différentes de o. Soit m (resp. n, resp. p) la droite qui joint le point d'intersection de a et b' (resp. b et c', resp. c et b') à celui de a' et b (resp. b' et c, resp. c' et a). Alors les trois droites m, n et p sont concourantes.

Exercice 26 La construction de gauche fournit une solution. L'ordre alphabétique des points correspond à l'ordre d'apparition dans la construction. La construction de gauche est bien duale de celle de droite.





Exercice 27 Soit h une injection de D dans D' conservant le birapport. Soient M, N et P trois points distincts de D. Comparer h avec l'homographie $D \to D'$ qui envoie M, N et P sur $h(M)$, $h(N)$ et $h(P)$ respectivement.

Exercice 28 L'homographie qui envoie a, b, c sur $\infty, 0, 1$ est $z \mapsto \dfrac{z-b}{z-a} \Big/ \dfrac{c-b}{c-a}$.

Exercice 29 Prendre la droite D_1 comme droite de l'infini. Le birapport $[M_1, M_2, M_3, M_4]$ est alors $\overline{M_2M_4}/\overline{M_2M_3}$. De même avec les $'$. Utiliser Thalès. Ou alors, considérer la projection de centre O qui est une homographie de Δ sur Δ'.

Exercice 30 Soit $\mathbb{P}(E)$ le plan projectif. On pose $\Delta = \mathbb{P}(F)$, $L = \mathbb{P}(V)$, où F (resp. V) est un sous-espace dedimension 2 de E (resp. E^*). Vérifier que la condition $\Delta \notin L$ équivaut au fait que F et $V^\perp$ sont supplémentaires. Prendre une base (x_1, x_2, x_3) de E avec (x_1, x_2) engendrant F et x_3 engendrant $V^\perp$. Si (x_1^*, x_2^*, x_3^*) est la base duale, alors (x_1^*, x_2^*) est une base de V. Décrire dans les bases (x_1^*, x_2^*) et (x_1, x_2) un isomorphisme linéaire de V dans F qui induit l'application $L \to \Delta$.

Exercice 31 Utiliser l'exercice 29, en passant par l'intermédiaire des birapports $[A', N, T, A$”$]$ et $[B', N, U, B$”$]$.

Exercice 32 Si X ne passe pas par S, soit T (resp. T') le point d'intersection de X avec D (resp. D'). Comparer les birapports $[S, T, A, M]$, et $[T', S, A', M']$, en passant par l'intermédiaire du birapport de T', T, du point d'intersection de AA' avec X et du point d'intersection de AM' avec $A'M$. Si X passe par S, choisir B sur D et son image B' sur D', et partir du birapport $[S, B, A, M]$.

Références

[App] M. Appert, J. Debardieux. *Problèmes résolus de mathématiques.* Dunod, 1990

[Art] E. Artin. *Algèbre Géométrique.* Gauthier Villars, 1967

[Aud] M. Audin. *Géométrie.* Belin, 1998

[Ber] M. Berger. *Géométrie - volume 1 : action de groupes, espaces affines,et projectifs.* Cedic - Fernand Nathan, 1979

[Del] R. Deltheil, D. Caire. *Compléments de Géométrie.* Baillière, 1951

[God] C. Godbillon. *Eléments de topologie algébrique.* Hermann, 1971

[Leb] D. Leborgne. *Calcul différentiel complexe.* Que sais-je 2560, P.U.F., 1991

[Leh] D. Lehmann, R. Bkouche.*Initiation à la Géométrie.* Presses Universitaires de France, 1988

[Mar] P. Martin. *Applications de l'Algèbre et de l'Analyse à la Géométrie.* Armand Colin, 1967

[Sam] P. Samuel. *Géométrie Projective.* Presses Universitaires de France, 1986

[Tis] C. Tisseron. *Géométries Affine, Projective et Euclidienne.* Hermann, 1983