TD - Algèbre linéaire

1. Soit u un endomorphisme d'un k-espace vectoriel E de dimension finie. Soit $P \in k[X]$ son polynôme minimal. On note $P = Q_1^{\alpha_1} \cdots Q_\ell^{\alpha_\ell}$ la décomposition de P en produit de facteurs unitaires irréductibles sur k.
   (a) Soit $x \in E$. Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire $M_x \in k[X]$ tel que $M_x(u)(x) = 0$ et que M_x divise tout polynôme $A \in k[X]$ tel que $A(u)(x) = 0$.
   (b) Montrer que, pour $1 \leq i \leq \ell$, il existe $a_i \in E$ tel que $M_{a_i} = Q_i^{\alpha_i}$. (On pourra écrire $P = Q_i^{\alpha_i} R$ et chercher a_i dans l'image de $R(u)$).
   (c) Soient $x, y \in E$ tels que M_x et M_y sont premiers entre eux. Montrer que $M_{x+y} = M_x M_y$.
   (d) Montrer qu'il existe $a \in M$ tel que $M_a = P$.
   (e) En déduire (sans Cayley-Hamilton) que $\deg P \leq \dim E$.

2. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si, pour tout $a \in \mathbb{C}$, $\operatorname{rang}(u - a\,\mathrm{Id}) = \operatorname{rang}((u - a\,\mathrm{Id})^2)$.

3. (a) Montrer qu'une famille $(g_1, \ldots, g_n)$ de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est libre si et seulement s'il existe des réels $r_1, \ldots, r_n$ tels que $\det(g_i(r_j)) \neq 0$.
   (b) Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Pour $a \in \mathbb{R}$, on note ϕ_a la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\phi_a(x) = f(a, x)$ et ψ_a celle définie par $\psi_a(x) = f(x, a)$. Soit $E = \operatorname{Vect}(\{\phi_a \mid a \in \mathbb{R}\})$ et $F = \operatorname{Vect}(\{\psi_a \mid a \in \mathbb{R}\})$. Montrer que E est de dimension finie si et seulement si F est de dimension finie, et qu'alors $\dim E = \dim F$.

4. Soient u et v des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie tels que $u \circ v = u + v$. Montrer que u et v commutent.

5. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$.
   Montrer que si $u \in \operatorname{End}(E)$ est un projecteur, alors $\operatorname{rang}(u) = \operatorname{trace}(u)$.
   Soient $u_1, \ldots, u_k$ des endomorphismes de E tels que $u_1 + \cdots + u_k = \mathbf{1}_E$.
   Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :
   (a) $u_i u_j = 0$ pour tous $i \neq j$.
   (b) $u_i^2 = u_i$ pour $i = 1, \ldots, k$.
   (c) $\operatorname{rang}(u_1) + \cdots + \operatorname{rang}(u_k) = n$.

6. Soit f une forme linéaire sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $f(AB) = f(BA)$ pour toutes matrices A, $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda\,\mathrm{trace}$.

7. Montrer que l'hyperplan vectoriel d'équation $\ell_1 x_1 + \cdots + \ell_n x_n = 0$ est stable par la matrice $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$ est un vecteur propre pour la matrice transposée ${}^tM$.

   Décrire tous les sous-espaces stables par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$. Caractériser les endomorphismes u de E tels que tout sous-espace vectoriel de E admette un supplémentaire stable.

9. On suppose que les matrices A, $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ commutent. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$ soit diagonalisable. (Indication : on pourra calculer $P(M)$ où P est un polynôme.)

10. Soient A, $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :
    (a) Il existe $P \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AP = PB$.
    (b) A et B ont une valeur propre commune.

    Pour (a) $\Rightarrow$ (b), raisonner par l'absurde en considérant les polynômes annulateurs minimaux. Pour (b) $\Rightarrow$ (a), se ramener au cas d'une valeur propre commune nulle.

11. Montrer que l'application $(A, B) \mapsto \mathrm{trace}(AB)$ est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer sa signature si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. (Indication : considérer la restriction de la forme quadratique au sous-espace des matrices symétriques).

12. Soient A et $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, B symétrique. Montrer que le degré du polynôme $P(X) = \det(A + XB)$ est inférieur ou égal au rang de B.

13. Soient A et $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, symétriques toutes les deux, A définie positive.
    (a) Montrer qu'il existe une matrice symétrique inversible S telle que $S^2 = A$.
    (b) Montrer que AB est diagonalisable et que son nombre de valeurs propres (comptées avec multiplicité) positives (resp. négatives, resp. nulles) est égal au nombre de valeurs propres positives (resp. négatives, resp. nulles) de B.

14. On note $\mathbb{R}_d[X]$ avec $X = (X_1, \ldots, X_n)$ l'espace vectoriel des polynômes en n indéterminées de degré total inférieur ou égal à d.
    (a) Calculer la dimension $D_{n,d}$ de $\mathbb{R}_d[X]$ sur $\mathbb{R}$.
    (b) Montrer que l'on peut trouver $D = D_{n,d}$ points $a_1, \ldots, a_D$ tels que pour tout $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ avec $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n \leq d$, il existe des réels $c_{\alpha,i}$, $i = 1, \ldots, D$ tels que, pour tout $P \in \mathbb{R}_d[X]$, le coefficient de $X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}$ dans $P(X)$ soit égal à $\sum_{i=1}^{D} c_{\alpha,i} P(a_i)$.
    (c) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tous a, $h \in \mathbb{R}^n$, la fonction $\mathbb{R} \ni t \mapsto f(a + th) \in \mathbb{R}$ soit polynomiale de degré $\leq d$. Montrer que f est une fonction polynomiale en n variables de degré total $\leq d$. (On pourra raisonner par récurrence sur n).