Transformée de Laplace et théorèmes tauberiens

L'objectif de ce document est double : faire le point sur la transformée de Laplace et démontrer des versions générales de théorèmes tauberiens importants. Tout ceci est simple si l'on suit le chapitre 13 du tome 2 du magnifique livre de Feller "*An Introduction to Probability Theory and Its Applications*". On commence d'abord dans les sections 1 et 2 par rappeler ce dont on a besoin sur les convergences des mesures positives. On n'entre dans le vif du sujet qu'à la Section 3 en démontrant le théorème tauberien de Karamata, qui donne un équivalent entre comportement en 0^+ de la transformée de Laplace $\varphi(a)$ d'une mesure positive μ sur $\mathbb{R}_+$, et mesure des grands intervalles $\mu([0, 1/a])$, lorsque a tend vers 0. On démontre dans la Section 4 le théorème tauberien d'Ikehara. Il permet entre autre de donner un équivalent de $\mu([1/a, 1/a + h])$ pour tout h fixé, lorsque a tend vers 0, précisant le théorème de Karamata. Il demande cependant d'avoir une information quantitative sur le comportement de la transformée de Laplace φ de μ dans le plan complexe. On peut déduire de l'énoncé d'Ikehara une démonstration simple du théorème des nombres premiers - voir ici. La Section 4 est indépendante des précédentes.

Notons C_c l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$, à support compact, et C_0 l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$ ayant 0 pour limite en $+\infty$. Pour une mesure μ sur $\mathbb{R}_+$ et $f \in C_0$, on note (f, μ) pour $\int f d\mu$. On ne travaillera dans toute la suite qu'avec des mesures boréliennes positives.

Définition 1. *On dit qu'une suite $(\mu_n)_{n\geqslant 0}$ de mesures positives sur $\mathbb{R}_+$* **converge vers une limite** *μ si*

$$(f, \mu_n) \to (f, \mu),$$

pour toute fonction $f \in C_c$. On note $\mu_n \overset{C_c^*}{\to} \mu$.

Si les μ_n sont par exemple des probabilités, on a

$$0 \leqslant (f, \mu) = \lim (f, \mu_n) \leqslant 1,$$

pour toute fonction $f \in C_c$ à valeurs dans $[0, 1]$. On voit donc que la limite μ d'une suite C_c^*-convergente de probabilités a une masse au plus égale à 1. Cette dernière peut être strictement plus petite, comme dans l'exemple des masses de Dirac δ_n, qui C_c^*-convergent vers la mesure nulle.

1 – Convergence de mesures positives finies sur $\mathbb{R}_+$

Proposition 2. *Soient $(\mu_n)_{n\geqslant 0}$ et μ des mesures positives de masses bornées par une constante M. On a $\mu_n \overset{C_c^*}{\to} \mu$ si, et seulement si,*

$$(g, \mu_n) \to (g, \mu),$$

pour toute fonction $g \in C_0$.

Démonstration – L'implication $\Longleftarrow$ est immédiate. Pour l'implication $\Longrightarrow$, étant donné $\varepsilon > 0$, on commence par prendre $m > 0$ assez grand pour avoir $|g| \leqslant \varepsilon$ sur l'intervalle (m, ∞). Si χ désigne alors une fonction à valeurs dans $[0, 1]$ qui vaut 1 sur $[0, m]$, et 0 au-delà de $m + 1$, on a

$$(g, \mu_n) - (g, \mu) = (g\chi, \mu_n - \mu) + \big(g(1 - \chi), \mu_n - \mu\big).$$

Le premier terme à droite tend vers 0 avec n, comme la fonction $g\chi$ est à support compacte, et le deuxième plus petit que $2M\varepsilon$. $\triangleright$

Proposition 3. *Toute suite de probabilités sur $\mathbb{R}_+$ admet une sous-suite C_c^*-convergente.*

Démonstration – Soit $(f_k)_{k\geqslant 0}$ une suite dense de C_c, muni de la norme uniforme. Un argument diagonal de Cantor montre l'existence d'une sous-suite $(\mu_{n_\ell})_{\ell\geqslant 0}$ telle que les $\big(f_k, \mu_{n_\ell}\big)$ convergent lorsque ℓ tend vers ∞, pour tout indice k. On voit alors qu'une suite (f, μ_{n_ℓ}), $f \in C_c$, est de Cauchy en décomposant

$$\big(f, \mu_{n_\ell}\big) - \big(f, \mu_{n_{\ell'}}\big) = \big(f - f_k, \mu_{n_\ell} - \mu_{n_{\ell'}}\big) + \big(f_k, \mu_{n_\ell} - \mu_{n_{\ell'}}\big).$$

Le premier terme est $o_k(1)$, indépendamment de ℓ, ℓ', et le second est petit pour ℓ, ℓ' à k fixé. On conclut classiquement à partir de là. ▷

Définition 4. *La* **transformée de Laplace** *d'une mesure finie positive sur* $\mathbb{R}_+$ *est la fonction*

$$\varphi(\lambda) := \int e^{-\lambda x} \mu(dx),$$

définie pour $\lambda \geqslant 0$.

Cette fonction est C^∞ sur $(0, \infty)$ et continue sur $[0, \infty)$, et

$$\varphi^{(k)}(\lambda) = \int (-x)^k e^{-\lambda x} \mu(dx). \tag{1.1}$$

Théorème 5. (**Unicité**) *Deux mesure positives finies sur* $\mathbb{R}_+$ *différentes ont des transformées de Laplace différentes.*

Démonstration – Soit X une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λx, pour $\lambda, x > 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$, l'inégalité de Chebychev nous assure que $\mathbb{P}\big(|X - \lambda x| > \lambda\varepsilon\big)$ tend vers 0 lorsque λ tend vers ∞. On a donc

$$e^{-\lambda x} \sum_{k \leqslant \lambda y} \frac{(\lambda x)^k}{k!} \underset{\lambda \to \infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0, & \text{si } y < x, \\ 1, & \text{si } y > x. \end{cases} \tag{1.2}$$

Notez que le terme de gauche prend ses valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$. En conséquence de l'identité (1.1) et de la convergence (1.2), on a

$$\begin{aligned} \sum_{k \leqslant \lambda y} \frac{(-\lambda)^k}{k!} \varphi^{(k)}(\lambda) &= \int \left(e^{-\lambda x} \sum_{k \leqslant \lambda y} \frac{(\lambda x)^k}{k!} \right) \mu(dx) \\ &\underset{\lambda \to \infty}{\longrightarrow} \mu\big([0, y)\big), \end{aligned} \tag{1.3}$$

si $\mu(\{y\}) = 0$ – on dit que y est un point de continuité de μ. La fonction croissante $y \mapsto \mu([0, y))$, étant continue à gauche avec des limites à droite, la formule (1.3) détermine complètement la mesure μ à partir de sa transformée de Laplace. ▷

Théorème 6. (**Continuité**) *Soit* μ_n *une suite de probabilités sur* $\mathbb{R}_+$*, de transformées de Laplace* φ_n.

- *Si* $\mu_n \overset{C_c^*}{\to} \mu$*, alors* $\varphi_n(\lambda) \to \varphi(\lambda)$*, pour tout* $\lambda > 0$.
- *Réciproquement, si la suite* $\varphi_n(\lambda)$ *converge pour chaque* $\lambda > 0$ *vers une limite* $\varphi(\lambda)$*, alors* φ *est la transformée de Laplace d'une mesure positive finie* μ *de masse au plus* 1*, et* $\mu_n \overset{C_c^*}{\to} \mu$. *Le mesure limite* μ *a une masse* 1 *ssi* $\varphi(\lambda) \to 1$ *lorsque* $\lambda \to 0$.

Démonstration – Le premier point est une conséquence directe de la proposition 2. Pour le second point, on commence par extraire une sous-suite μ_{n_ℓ} convergeant C_c^* vers une limite μ. Le premier point nous assure que φ est la transformée de Laplace de μ, qui est donc uniquement définie, d'après le théorème 5. La suite μ_n converge donc puisqu'elle n'a qu'un seul point d'adhérence. Le dernier item de l'énoncé est élémentaire. ▷

2 – Transformée de Laplace de mesures positives sur $\mathbb{R}_+$

La transformée de Laplace φ de μ fait sens pour une mesure *positive* quelconque μ sur $\mathbb{R}_+$ pour laquelle l'intégrale converge. Notez que $\varphi(\lambda + \lambda_0)$ est bien définie pour tout $\lambda > 0$ si $\varphi(\lambda_0)$ est bien définie, que

$$\varphi(\lambda + \lambda_0) = \int e^{-\lambda x}\, e^{-\lambda_0 x} \mu(dx)$$

est la transformée de Laplace de la mesure finie positive $e^{-\lambda_0 x}\mu(dx)$, et que $\varphi(\lambda+\lambda_0)/\varphi(\lambda_0)$ est la transformée de Laplace d'une probabilité. A ce titre tous les énoncés de la section précédente se généralisent automatiquement à une classe plus grande de mesures positives.

Théorème 7. • **Unicité.** *Une mesure positive sur $\mathbb{R}_+$ est uniquement déterminée par ses valeurs sur un intervalle $[\lambda_0,\infty)$.*

- **Continuité.** *Soit μ_n une suite de mesures positives de transformées de Laplace φ_n. Si $\varphi_n(\lambda)$ converge vers $\varphi(\lambda)$ pour tout $\lambda > \lambda_0$, alors φ est la transformée de Laplace d'une mesure positive μ telle que $\mu_n \overset{C_c^*}{\to} \mu$. Si réciproquement $\mu_n \overset{C_c^*}{\to} \mu$ et la suite $\varphi_n(\lambda_0)$ est bornée, alors $\varphi_n(\lambda)$ converge vers $\varphi(\lambda)$ pour tout $\lambda > \lambda_0$.*

S'assurer que la suite $\varphi_n(\lambda_0)$ est bornée permet de se placer dans le cadre de la section précédente. A titre de contre-exemple, si $\mu_n = e^{n^2}\delta_n$, alors μ_n converge C_c^* vers la mesure nulle alors que $\varphi_n(\lambda) = e^{n(n-\lambda)}$ diverge vers ∞ pour tout $\lambda > 0$. Notons que les énoncés de convergence valent tout autant pour une famille $(\mu_a)_{a>0}$ indexée par des réels plutôt que par des entiers, lorsque le paramètre a tend de facon monotone vers 0 ou $+\infty$.

3 – Théorème tauberien de Karamata

On note Γ la fonction d'Euler, pour laquelle $\Gamma(n+1) = n!$, pour tout entier n. L'énoncé suivant est dû à Karamata.

Théorème 8. *Soit μ une mesure positive sur $\mathbb{R}_+$ de transformée de Laplace φ. On a équivalence entre l'existence d'un $\lambda_0 > 0$ tel que*

$$\frac{\varphi(a\lambda)}{\varphi(a)} \underset{a\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{\lambda^\rho} \tag{3.1}$$

pour tout $\lambda > \lambda_0$, et la convergence pour tout $x \geqslant 0$

$$\frac{\mu([0,bx])}{\mu([0,b])} \underset{b\to\infty}{\longrightarrow} x^\rho. \tag{3.2}$$

Chaque assertion implique

$$\varphi(a) \sim \Gamma(\rho+1)\,\mu([0,1/a]), \tag{3.3}$$

lorsque a tend vers 0.

Démonstration – $\Longrightarrow$ La fonction $\frac{\varphi(a\lambda)}{\varphi(a)}$ est la transformée de Laplace de la mesure positive

$$\nu_a([0,x]) := \frac{\mu([0,x/a])}{\varphi(a)}; \tag{3.4}$$

aussi la convergence de la transformée de Laplace de ν_a implique-t-elle la C_c^*-convergence de ν_a vers une limite ν. On identifie directement cette dernière à partir de sa transformée de Laplace, comme la mesure positive Λ à densité $\frac{x^\rho}{\Gamma(\rho+1)}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$. On obtient alors (3.3) à partir de l'identité (3.4) en prenant $x = 1$ dans cette dernière et en envoyant a vers 0. L'identité (3.3) est conséquence de la convergence de (3.4) lorsque a tend vers 0.

$\Longleftarrow$ Définissons la mesure positive

$$_b\nu([0,x]) := \frac{\mu([0,bx])}{\mu([0,b])}.$$

La convergence (3.2) nous assure que $_b\nu \overset{C_c^*}{\to} \Lambda$, lorsque b tend vers ∞. Notons aussi que la mesure $_b\nu$ a pour transformée de Laplace $\frac{\varphi(\lambda/b)}{\mu([0,b])}$. On vérifie que $\frac{\varphi(1/2b)}{\mu([0,b])}$ est borné indépendemment de $b \geqslant 1$ en écrivant

$$\varphi(1/2b) = \int e^{-x/2b}\mu(dx) \leqslant \sum_{n\geqslant 0} e^{-2^{n-1}}\mu([0,2^{n+1}b]).$$

Comme la convergence (3.2) nous donne

$$\mu([0,2b]) \lesssim 2^\rho \mu([0,b]),$$

on a

$$\varphi(1/b) \lesssim \mu([0,b]) \sum_{n\geqslant 0} 2^{n(\rho+1)} e^{-2^{n-1}} < \infty.$$

On peut donc appliquer le résultat de continuité du théorème 7 et en déduire que $\frac{\varphi(\lambda/b)}{\mu([0,b])}$ converge vers $\frac{\Gamma(\rho+1)}{\lambda^\rho}$, pour tout $\lambda > 1/2$. Prendre $\lambda = 1$ redonne l'équivalent (3.3), puis (3.1). ▷

Le résultat précédent motive la définition suivante.

Définition 9. *On dit d'une fonction L qu'elle est à* **variation lente en** 0 *si on a quel que soit $\lambda > 0$*

$$\frac{L(t\lambda)}{L(t)} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 1,$$

On dit L à **variation lente à l'infini** si $L(1/t)$ est à croissance lente en 0. L'équivalent (3.1) signifie que la fonction $t^\rho\varphi(t)$ est à variation lente en 0 ; l'équivalent (3.2) signifie que la fonction $\mu([0,x])/x^\rho$ est à variation lente en $+\infty$. En ces termes, le détail de la démonstration du théorème 8 permet de le ré-écrire sous la forme suivante.

Théorème 10. *Soit L une fonction à croissance lente en $+\infty$, et $0 \leqslant \rho < \infty$. On a l'équivalence*

$$\Big\{\varphi(a) \sim_{0^+} a^{-\rho} L(1/a)\Big\} \Longleftrightarrow \Big\{\mu([0,b]) \sim_{+\infty} \frac{b^\rho L(b)}{\Gamma(\rho+1)}\Big\}.$$

Cet énoncé redonne le résultat classique sur les séries si on l'applique à la mesure $\mu = \sum_{n\geqslant 0} q_n\delta_n$, où les $q_n \geqslant 0$. On a en effet

$$\varphi(a) = \sum_{n\geqslant 0} q_n (e^{-a})^n$$

et

$$\mu([0,b]) = \sum_{n\leqslant b} q_n.$$

Notant $Q(s) := \sum_{n\geqslant 0} q_n s^n$, pour $0 \leqslant s < 1$, on a donc

$$\Big\{Q(s) \sim_{1^-} (1-s)^{-\rho} L\big(1/(1-s)\big)\Big\} \Longleftrightarrow \Big\{q_1 + \cdots + q_n \sim \frac{n^\rho L(n)}{\Gamma(\rho+1)}\Big\}.$$

Si de plus la suite des q_n est monotone, chacune des deux assertions est équivalente au fait que

$$q_n \sim \frac{n^{\rho-1} L(n)}{\Gamma(\rho+1)}.$$

4 – Un raffinement dû à Ikehara

Le théorème 8 donne un équivalent de $\mu([0,1/a])$, pour a petit, en terme du comportement en 0^+ de la transformée de Laplace φ de μ. On peut raffiner sous certaines conditions cet équivalent pour obtenir des estimées de $\mu([1/a, 1/a+h])$, pour h fixé, lorsque a tend vers 0. Cela demande une information sur le comportement de la transformée de Laplace dans le plan complexe, tel qu'elle apparait dans l'énoncé suivant, dû à Ikehara.

Théorème 11. *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction croissante. S'il existe deux constantes $c, \ell \geqslant 0$ telles que l'intégrale*

$$F(z) := \int_0^\infty e^{-zx} f(x)\,dx$$

converge sur le demi plan ouvert $\big\{\mathrm{Re}(z) > c\big\}$ et que la fonction

$$G(z) := F(z) - \frac{\ell}{z-c}$$

admet une extension continue au demi plan fermé $\big\{\mathrm{Re}(z) \geqslant c\big\}$, alors

$$e^{-cx} f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

On déduit effectivement de cet énoncé un équivalent de $\mu([1/a, 1/a+h])$, pour h fixé, lorsque a tend vers 0. On regarde ici la transformée de Laplace (complexe) de la mesure $\mu(dx) = f(x)dx$. Notons que

$$G(z) = \int_0^\infty \big(e^{-cx} f(x) - \ell\big) e^{-(z-c)x} dx =: \int_0^\infty \phi(x) e^{-(z-c)x} dx.$$

On souhaite montrer que ϕ tend vers 0 en $+\infty$. On va voir que ϕ est essentiellement une transformée de Fourier, si bien que la conclusion viendra du lemme de Riemann-Lebesgue. La chose est toute bête. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a effectivement que

$$G(c+\varepsilon+it) = \int_0^\infty e^{-\varepsilon x} \phi(x) e^{-itx} dx$$

est la “transformée de Fourier” de $e^{-\varepsilon x}\phi(x)$, si l'on oublie qu'on intègre ici sur $(0,+\infty)$ plutôt que sur $\mathbb{R}$ tout entier. En prenant la transformée de Fourier inverse en t on aurait

$$\int e^{iyt} G(c+\varepsilon+it)dt = \int\int_0^\infty e^{-\varepsilon x}\phi(x) e^{-itx} dx dt = \int_0^\infty e^{-\varepsilon x} \phi(x) e^{-itx} \delta_y(x) dx = e^{-\varepsilon y}\phi(y),$$

si l'on pouvait intervertir les deux intégrales, en nous servant de l'identité $\int e^{it(y-x)}dt = \delta_y(x)$. Si l'on pouvait envoyer ε vers 0 sans précaution on obtiendrait bien ϕ sous forme de transformée de Fourier

$$\phi(y) = \int e^{iyt} G(c+it)dt.$$

Reste à rendre quantitatif ce raisonnement qualitatif.

Démonstration – Donnons-nous une famille de fonctions ρ_n sur $\mathbb{R}$, à support compact, et telles que les $\widehat{\rho_n}$ forment une approximation de l'unité. On peut alors effectivement intervertir ci-dessous l'intégrale en t et l'intégrale en x définissant G et obtenir

$$\int e^{iyt} \rho_n(t) G(c+\varepsilon+it)dt = \int_0^\infty e^{-\varepsilon x} \phi(x) \widehat{\rho_n}(y-x) dx$$

Puisque G est continue sur le demi plan fermé $\big\{\mathrm{Re}(z) \geqslant c\big\}$ et que ρ_n est à support compact, la famille de fonctions $\big(\rho_n(\bullet)G(c+\varepsilon+i\bullet)\big)_{0<\varepsilon\leqslant 1}$ converge uniformément vers la fonction $\rho_n(\bullet)G(c+i\bullet)$ et

$$\int e^{iyt}\rho_n(t) G(c+\varepsilon+it)dt \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \int e^{iyt}\rho_n(t)G(c+it)dt.$$

On a donc, d'après le théorème de convergence monotone,

$$\int e^{iyt}\rho_n(t)G(c+it)dt = \int_0^\infty \phi(x)\widehat{\rho_n}(y-x)dx,$$

et puisque la fonction $\rho_n(\bullet)G(c+i\bullet)$ est intégrable (car continue et à support compact), on a

$$(\bigstar) := \int_0^\infty \phi(x)\widehat{\rho_n}(y-x)dx \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

d'après le lemme de Riemann-Lebesgue. Rappelons que $\phi(x) = e^{-cx}f(x) - \ell$. On n'a jusque-là pas utilisé le fait que f est croissante. Donnons-nous maintenant $\delta > 0$ et notons que pour $y \geqslant 0$

$$(\bigstar) = \int_{-\infty}^{y+\delta} \phi(y+\delta-z)\widehat{\rho_n}(z)dz \geqslant \int_{-\delta}^{\delta} \phi(y+\delta-z)\widehat{\rho_n}(z)dz \geqslant \int_{-\delta}^{\delta} \Big(e^{-c(y+2\delta)}f(y) - \ell\Big)\widehat{\rho_n}(z)dz,$$

du fait que f est croissante, avec $e^{-c(y+2\delta)}f(y) - \ell = e^{-2\delta c}\phi(y) + \big(e^{-2\delta c}\ell - \ell\big)$. Puisque la limite supérieure en y du terme de gauche est nulle il s'ensuit qu'on a pour tout n

$$0 \geqslant e^{-2\delta c} \limsup_{+\infty} \phi + \big(e^{-2\delta c}\ell - \ell\big) \int_{-\delta}^{\delta} \widehat{\rho_n}(z)dz.$$

On en conclut que $\limsup_{+\infty} \ \phi \leqslant 0$, en envoyant n vers ∞ puis δ vers 0. On tire au passage le fait que ϕ est majorée, disons par une constante m. Maintenant, on a

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \phi(x)\widehat{\rho_n}(y-\delta-x)dx &= \int_{-\infty}^{y-\delta} \phi(y+\delta-z)\widehat{\rho_n}(z)dz \\ &\leqslant \int_{-\delta}^{\delta} \phi(y-\delta-z)\widehat{\rho_n}(z)dz + m\int_{-\infty}^{y-\delta} \mathbf{1}_{|z|>\delta}\widehat{\rho_n}(z)dz.\end{aligned} \tag{4.1}$$

La croissance de f donne cette fois $\phi(y-\delta-z) \leqslant e^{-c(y-2\delta)}f(y)-\ell$, lorsque $|z| \leqslant \delta$, et l'on conclut comme ci-dessus de l'inégalité (4.1) que $\liminf \ \phi \geqslant 0$, du fait que les $\widehat{\rho_n}$ forment une approximation de l'identité. $\triangleright$