Université de Rennes 1
Préparation à l'agrégation
de mathématiques
Auteur du document :
A. Ducros

Préparation à l'agrégation de mathématiques de l'Université de Rennes 1.
Année scolaire 2002-2003.

Exemples d'utilisations des coordonnées barycentriques

Antoine Ducros

Dans ce texte on refait en détail l'étude de l'intersection de droites dans le plan du point de vue des coordonnées barycentriques, et l'on montre comment appliquer ces techniques aux démonstrations des théorèmes de Ceva et Menelaüs. On évoque ensuite les liens entre les barycentres et la géométrie projective.

Convention pour ce qui suit. *On fixe pour toute la suite du texte un corps* k. Si $(P_0,\ldots,P_n)$ sont des points d'un k-espace affine X et si $(\lambda_0,\ldots,\lambda_n)$ est une famille de scalaires *de somme 1* on notera $\sum \lambda_i P_i$ le barycentre de la famille $((P_1,\lambda_1),\ldots,(P_n,\lambda_n))$. Si X est un espace vectoriel sur k alors $\sum \lambda_i P_i$ (au sens des barycentres) est égal à $\sum \lambda_i P_i$ (au sens de la structure de k-espace vectoriel sur X).

Rappel sur les coordonnées barycentriques. Soit X un espace affine sur un corps k et n sa dimension. Soit $(P_0,\ldots,P_n)$ un *repère affine* sur X. On sait alors qu'il existe pour tout point P de X une famille (λ_i) de scalaires, *unique à multiplication par un scalaire non nul près*, telle que $\sum \lambda_i \neq 0$ et telle que P soit le barycentre de la famille $((P_1,\lambda_1),\ldots,(P_n,\lambda_n))$. On peut toujours normaliser cette famille de sorte que $\sum \lambda_i = 1$. Les λ_i sont alors *uniquement déterminés* et l'on dit que ce sont les *coordonnées barycentriques* de P dans le repère formé par les P_i ; l'on a donc $P = \sum \lambda_i P_i$. Si Y est un espace affine quelconque alors pour tout $(n+1)$-uplet $(Q_0,\ldots,Q_n)$ de points de Y il existe une et une seule application affine de X vers Y envoyant P_i sur Q_i pour tout i. Cette application envoie $\sum \lambda_i P_i$ sur $\sum \lambda_i Q_i$.

On fixe à partir de maintenant un k-espace affine X et un repère affine $(P_0,\ldots,P_n)$ sur X. Lorsqu'on écrira $\sum \lambda_i P_i$ la famille des λ_i sera toujours supposée vérifier l'égalité $\sum \lambda_i = 1$ *sans que cela soit rappelé.*

Formes affines et hyperplans affines. On appelle *forme affine* sur X toute application affine de X vers k. Tout hyperplan affine est le noyau d'une forme affine *surjective*, c'est-à-dire non constante (puisque l'image d'une telle forme est un sous-espace affine de k, donc est réduite à un point ou bien égale à k lui-même). Réciproquement le noyau de toute forme affine surjective sur X est un hyperplan affine. Deux formes affines surjectives φ et ψ déterminent le même hyperplan si et seulement si il existe un scalaire *non nul* λ tel que $\varphi = \lambda\psi$.

Pour tout $(n+1)$-uplet $(a_0,\ldots,a_n)$ il existe une et une seule forme affine φ sur X telle que $\varphi(P_i)=a_i$. De l'unicité d'une telle φ on déduit immédiatement que φ est constante si et seulement si les $\varphi(P_i)$ sont tous égaux. Se donner une forme affine non constante revient donc à se donner une famille de scalaires $(a_0,\ldots,a_n)$ *non tous égaux*; on dira d'une telle famille qu'elle est *non constante*. La forme déterminée par une telle famille est l'application de X dans k qui envoie $\sum \lambda_i P_i$ sur $\sum a_i\lambda_i$. L'hyperplan qu'elle définit est l'ensemble des $\sum \lambda_i P_i$ où la famille λ_i vérifie $\sum a_i\lambda_i=0$, et bien sûr $\sum \lambda_i = 1$. Notons qu'une telle famille existe toujours : en effet *comme les a_i ne sont pas tous égaux* la forme *linéaire* $(\lambda_i)\mapsto \sum \lambda_i a_i$ n'est pas colinéaire à $(\lambda_i)\mapsto \sum \lambda_i$ et donc leurs noyaux respectifs sont *deux hyperplans vectoriels distincts* de k^{n+1}. En particulier le noyau de $(\lambda_i)\mapsto \sum \lambda_i a_i$ contient au moins un élément $(\lambda_0,\ldots,\lambda_n)$ tel que $\sum \lambda_i \neq 0$. En divisant chacun des λ_i par $\sum \lambda_i$ on obtient bien un $(n+1)$-uplet qui satisfait aux conditions requises.

A partir de maintenant on suppose que X est de dimension 2. C'est donc un plan affine, et les hyperplans affines de X sont les droites affines. Donnons-nous deux familles non constantes de scalaires (a_0,a_1,a_2) et (b_0,b_1,b_2). Notons D_a (resp. D_b) la droite affine de X d'équation $\sum a_i\lambda_i = 0$ (resp. $\sum b_i\lambda_i=0$). Remarquons que la matrice

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

est non nulle d'après l'hypothèse faite sur les a_i et les b_i.

Cette matrice est de rang 1 si et seulement si la famille de ces deux lignes est liée. Comme les lignes en question sont toutes deux non nulles (parce que les a_i ne sont pas tous égaux, et les b_i non plus) ceci équivaut à l'existence d'un scalaire non nul λ tel que $(a_0,a_1,a_2)=\lambda(b_0,b_1,b_2)$, c'est-à-dire à *l'égalité* des droites D_a et D_b.

Supposons que D_a et D_b sont *distinctes*, c'est-à-dire, d'après ce qui précède, que la matrice

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

est de rang 2. L'espace $\vec{D}$ des solutions (dans k^3) du système linéaire qu'elle définit est donc de dimension 1. Soit (x_0,y_0,z_0) un élément *non nul* de cet espace de solutions; notons que $\vec{D}=k(x_0,y_0,z_0)$. Deux cas se présentent :

- Si $x_0+y_0+z_0=0$ alors pour tout λ appartenant à k l'on a $\lambda x_0+\lambda y_0+\lambda z_0 = 0$; les deux équations $\sum a_i\lambda_i=0$ et $\sum b_i\lambda_i=0$ n'ont donc *aucune solution commune* $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ *telle que* $\sum\lambda_i=1$. En conséquence D_a et D_b ne se rencontrent pas : elles sont parallèles.
- Si $x_0+y_0+z_0\neq 0$ alors il existe un et un seul λ appartenant à k tel que $\lambda x_0+\lambda y_0+\lambda z_0 = 1$; les deux équations $\sum a_i\lambda_i=0$ et $\sum b_i\lambda_i=0$ ont

donc *une et une seule solution commune* $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ *telle que* $\sum \lambda_i = 1$. En conséquence l'intersection de D_a et D_b est un singleton.

Position relative de trois droites. On se donne maintenant trois droites D_a, D_b, D_c dans X d'équations respectives en coordonnées barycentriques

$$\sum a_i\lambda_i = 0, \sum b_i\lambda_i = 0 \text{ et } \sum c_i\lambda_i = 0,$$

où les familles $(a_i), (b_i)$ et (c_i) sont non constantes. Soit M la matrice

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{pmatrix}.$$

On suppose que D_a, D_b et D_c sont *deux à deux distinctes* ce qui signifie, comme on l'a vu plus haut, que les 3 matrices 2×3 qui peuvent être extraites de M sont toutes de rang 2 (et le rang de M lui-même est donc 2 ou 3). On note $\vec{D}_{a,b}$ la droite vectorielle de k^3 formée des solutions du système

$$\begin{array}{rcl} a_0\lambda_0 + a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 & = & 0 \\ b_0\lambda_0 + b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 & = & 0 \end{array}$$

et on définit $\vec{D}_{a,c}$ et $\vec{D}_{b,c}$ de manière analogue.

Proposition. *Avec les hypothèses et notations ci-dessus les propositions suivantes sont équivalentes :*

i) *La matrice M est de rang 2.*

ii) *Les droites D_a, D_b, D_c sont concourantes ou parallèles.*

Démonstration. Montrons $i) \Rightarrow ii)$. Si M est de rang 2 l'espace des solutions dans k^3 du système linéaire associé est une droite vectorielle $\vec{D}$. Comme cet espace est inclus dans $\vec{D}_{a,b}$ de manière évidente il est en fait *égal* à $\vec{D}_{a,b}$ pour des raisons de dimension ; de même il est égal à $\vec{D}_{a,c}$ et $\vec{D}_{b,c}$. Soit (x_0, y_0, z_0) un élément *non nul* de $\vec{D}$. Alors

$$\vec{D}_{a,b} = \vec{D}_{b,c} = \vec{D}_{a,c} = k(x_0, y_0, z_0)$$

et l'étude de l'intersection de deux droites faite ci-dessus montre alors que si $x_0 + y_0 + z_0 \neq 0$ les droites D_a, D_b et D_c sont concourantes et que dans le cas contraire elles sont parallèles.

Montrons maintenant $ii) \Rightarrow i)$. Si les trois droites sont concourantes il existe une solution commune $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$, avec de plus $\sum \lambda_i = 1$, aux trois équations de D_a, D_b et D_c. Ce triplet $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ est en particulier une solution non nulle du système linéaire défini par M ; le rang de cette dernière ne peut donc être égal à 3, et est par conséquent égal à 2.

Si les trois droites sont parallèles alors $\vec{D}_{a,b}$ est, toujours d'après l'étude de l'intersection de deux droites faite ci-dessus, de la forme $k(x_0, y_0, z_0)$ où (x_0, y_0, z_0) est non nul et vérifie $x_0 + y_0 + z_0 = 0$. De même $\vec{D}_{a,c}$ est de la forme $k(x_1, y_1, z_1)$ où (x_1, y_1, z_1) est non nul et vérifie $x_1 + y_1 + z_1 = 0$. Les vecteurs (x_0, y_0, z_0) et (x_1, y_1, z_1) sont donc tous deux dans l'espace $\vec{P}$ des solutions de l'équation $\sum a_i\lambda_i = 0$. Ils sont aussi tous deux dans le plan vectoriel $\vec{Q}$ d'équation $\sum \lambda_i = 0$. Or comme la famille (a_i) est non constante la forme linéaire $(\lambda_i) \mapsto \sum a_i\lambda_i$ n'est pas colinéaire à $(\lambda_i) \mapsto \sum \lambda_i$. On en déduit que les plans $\vec{P}$ et $\vec{Q}$ de k^3 sont *distincts*, et donc que leur intersection est une *droite vectorielle.* La famille $((x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1))$ est de ce fait liée, et donc (x_0, y_0, z_0) appartient à $\vec{D}_{a,c}$. Ce triplet non nul annule par conséquent les trois lignes du système défini par M, d'où il découle que M est de rang 2. Ceci achève la démonstration. $\square$

Le théorème de Menelaüs. On se donne un corps k, un plan affine X sur k et un triangle (ABC) dans X ; le triangle est supposé non dégénéré, c'est-à-dire que les 3 points A, B et C ne sont pas alignés. On se donne trois points A', B' et C' respectivement situés sur (BC), (CA) et (AB), aucun des trois n'étant égal à A, B ou C. Le théorème affirme alors l'équivalence entre les assertions

i) Les points A', B' et C' sont alignés.

ii)
$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B'}} = 1.$$

Comme (ABC) est non dégénéré il constitue un repère affine, dans lequel on va travailler. Le point A' étant situé sur la droite (BC) on peut écrire $A' = \lambda_{A'}B + \nu_{A'}C$ et de même $B' = \lambda_{B'}A + \nu_{B'}C$ et $C' = \lambda_{C'}A + \mu_{C'}B$. Les points A', B' et C' sont alignés si et seulement si il existe une forme affine non constante annulant chacun de leurs systèmes de coordonnées barycentriques, autrement dit si et seulement si il existe une forme linéaire non nulle annulant chacune des lignes de la matrice
$$\begin{pmatrix} 0 & \mu_{A'} & \nu_{A'} \\ \lambda_{B'} & 0 & \nu_{B'} \\ \lambda_{C'} & \mu_{C'} & 0 \end{pmatrix}.$$
Les points A', B' et C' sont en conséquence alignés si et seulement si le déterminant de la matrice ci-dessus est nul. En le développant par rapport à l'une des colonnes on voit que cette annulation équivaut à l'égalité

$$\lambda_{B'}\mu_{C'}\nu_{A'} = -\nu_{B'}\lambda_{C'}\mu_{A'}.$$

Comme $A' = \mu_{A'}B + \nu_{A'}C$ un calcul simple montre que

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = -\frac{\nu_{A'}}{\mu_{A'}}.$$

On établit deux autres égalités analogues d'où l'on tire immédiatement l'équivalence des formules $\lambda_{B'}\mu_{C'}\nu_{A'} = -\nu_{B'}\lambda_{C'}\mu_{A'}$ et

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B'}} = 1.$$

Le théorème de Ceva. On part de la même situation que ci-dessus : (ABC) est un triangle non dégénéré d'un plan affine X sur un corps k et l'on désigne par A', B' et C' trois points de X respectivement situés sur (BC), (CA) et (AB), aucun des trois n'étant égal à A, B ou C. Le théorème de Ceva affirme alors l'équivalence des assertions suivantes :

i) Les droites $(AA'), (BB'), (CC')$ sont parallèles ou concourantes.

ii)
$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1.$$

Le triangle (ABC) étant non dégénéré on travaille là encore dans le repère affine qu'il définit. Exactement comme lors de la démonstration du théorème de Menelaüs l'on peut écrire $A' = \mu_{A'}B + \nu_{A'}C, B' = \lambda_{B'}A + \nu_{B'}C$ et $C' = \lambda_{C'}A + \mu_{C'}B$. Cherchons l'équation de la droite (AA') dans le repère affine (ABC) ; il suffit de trouver une forme affine non constante nulle en A et en A'. Or les coordonnées de A sont $(1, 0, 0)$ et celles de A' sont $(0, \mu_{A'}, \nu_{A'})$. On remarque que la forme $(\lambda, \mu, \nu) \mapsto \nu_{A'}\mu - \mu_{A'}\nu$ satisfait aux conditions requises ; son noyau est donc la droite (AA'). On raisonne de même pour (BB') et (CC'), et l'on voit que les trois droites étudiées peuvent être définies par trois formes affines qui sont les trois lignes de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \nu_{A'} & -\mu_{A'} \\ \nu_{B'} & 0 & -\lambda_{B'} \\ \mu_{C'} & -\lambda_{C'} & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme ces droites sont deux à deux non confondues (cela résulte du fait que chacun des trois points A', B' et C' est par hypothèse différent de A, B et C) elles sont parallèles ou concourantes si et seulement si le déterminant de la matrice ci-dessus est nul (d'après l'étude de la position relative de trois droites menée plus haut). On conclut en développant le déterminant en question et en utilisant le même argument (sur les mesures algébriques) qu'à la fin de la preuve du théorème de Menelaüs.

Barycentres et géométrie projective. Le lecteur attentif aura peut-être remarqué qu'un certain nombre de points mentionnés ici font penser à la géométrie projective : par exemple, le fait que le barycentre d'une famille de points pondérés ne change pas si on multiplie la liste des poids par un scalaire non nul, ou bien le fait que la théorie traite de manière analogue les triplets de droites parallèles et de droites concourantes... Le but de ce qui suit est de comprendre le lien entre les points de vue barycentrique et projectif.

Soit X un espace affine de dimension n. Identifions-le à un sous-espace affine *non linéaire* d'un espace vectoriel E de dimension $n+1$; par exemple on se donne un repère affine sur X et on envoie X dans k^{n+1} par l'application "liste des coordonnées barycentriques", application qui induit un isomorphisme entre X et l'hyperplan affine de k^{n+1} d'équation $\sum x_i = 1$. D'une manière générale si X est un hyperplan affine non linéaire de E il peut toujours être écrit comme le lieu des points en lequel une certaine forme linéaire φ (à laquelle on peut penser comme à un *poids*) vaut 1. Le noyau de φ est alors isomorphe à l'espace directeur $\vec{X}$ de X. Une famille (Q_i) de points de X est un repère affine de X si et seulement si elles constitue une base de E. Si (P_i) est une famille de points de X et (α_i) une famille de scalaires preque tous nuls la somme $\sum \alpha_i P_i$ a un sens dans E ; si $\sum \alpha_i = 1$ cette somme est dans X (appliquer φ) et l'on retrouve le barycentre de la famille des (P_i, α_i). Si $\sum \alpha_i$ est un scalaire λ non nul alors $\sum \alpha_i P_i$ est égal à λG où G est le barycentre de la famille (P_i, α_i). Si $\sum \alpha_i = 0$ on trouve un élément de $\vec{X}$ (par exemple si P et Q sont deux points de X l'élément $Q - P$ de E est bien sûr le vecteur $\vec{PQ}$ de $\vec{X}$).

Considérons maintenant l'espace projectif $\mathbb{P}(E)$, quotient de $E - \{0\}$ par la relation de colinéarité. L'espace X est inclus dans $E - \{0\}$ *et la restriction à X de l'application quotient $E - \{0\} \to \mathbb{P}(E)$ est injective.* Ainsi X s'identifie à un espace affine de $\mathbb{P}(E)$. L'image d'un élément x de $E - \{0\}$ dans $\mathbb{P}(E)$ appartient à X si et seulement si $\varphi(x) \neq 0$; et dans ce cas l'image de x dans $\mathbb{P}(E)$ est égale à celle de l'élément $x/\varphi(x)$ de X. Le complémentaire de X dans $\mathbb{P}(E)$ est donc l'hyperplan projectif $\mathbb{P}(\vec{X})$. Soit (P_i) une famille de points de X et (α_i) une famille de scalaires presque tous nuls. Si $\sum \alpha_i \neq 0$ le barycentre de la famille (P_i, α_i) est bien défini. *Si $\sum \alpha_i = 0$ mais si $\sum \alpha_i P_i \neq 0$ dans E, ce qui sera par exemple le cas si les P_i forment un repère affine de X et si les α_i sont non tous nuls*, on peut encore définir le "barycentre" de la famille de points (P_i, α_i) comme l'image dans $\mathbb{P}(E)$ de $\sum \alpha_i P_i$. Comme $\varphi(\sum \alpha_i P_i) = \sum \alpha_i \varphi(P_i) = \sum \alpha_i = 0$ cette image appartient à l'hyperplan projectif $\mathbb{P}(\vec{X})$. Elle est donc "rejetée à l'infini" *et ne change pas si l'on multiplie chacun des α_i par un scalaire non nul.*

Exemples. Si P et Q sont deux points *distincts* de X le "barycentre" de $((Q,1),(P,-1))$ correspond d'après ce qui précède à l'image de $\vec{PQ}$ dans l'hyperplan à l'infini $\mathbb{P}(\vec{X})$. Si l'on voit "l'hyperplan à l'infini" en question comme l'ensemble des directions de droites vectorielles de X, le "barycentre" de la famille $((Q,1),(P,-1))$ est donc le point correspondant à la direction de la droite (PQ) ; c'est encore si l'on préfère le "point à l'infini" de cette même droite.

Phénomènes amusants en caractéristique 2 et 3. Notons que si la caractéristique de k est 2 on a $1 = -1$ et ce que l'on vient de définir est en quelque sorte l'"isobarycentre" de P et Q : *en caractéristique 2 le "milieu" d'un bipoint* (P, Q) *avec* P *et* Q *distincts est donc le point à l'infini de la droite* (PQ). Ainsi dans un triangle (ABC) en caractéristique 2 la "médiane" issue de A est la droite passant par A et *parallèle* à (BC), et *idem* pour les deux autres. A titre d'exercice donnez-vous explicitement (avec des coordonnées) un tel triangle et vérifiez que les "médianes" ainsi définies concourent bien en l'isobarycentre (au sens classique cette fois car $1 + 1 + 1 \neq 0$ en caractéristique 2) du triangle.

Si l'on est en caractéristique 3 le milieu d'un bipoint est bien défini (car alors $1 + 1 \neq 0$), et l'on peut donc parler de médiane au sens classique... par contre l'isobarycentre d'un triangle (en lequel les médianes sont censées concourir) est rejeté à l'infini puisque $1 + 1 + 1 = 0$. On peut vérifier que les médianes d'un triangle en caractéristique 3 se rencontrent effectivement en cet "isobarycentre" mais comme il est à l'infini cela signifie qu'elles sont...parallèles si l'on reste dans le plan affine ! Là encore, vous pouvez le vérifier par un calcul explicite sur un exemple de votre choix.

Remarque. Si la caractéristique de k est différente de 2 le milieu d'un bipoint (AB) est l'unique point C' tel que $\overline{AC'} + \overline{BC'} = 0$. Si A', B' et C' sont les milieux des côtés d'un triangle non dégénéré (ABC) alors le théorème de Ceva permet de conclure que les médianes sont... concourantes ou parallèles ! Et ce qui précède montre qu'il faut se garder d'exclure ce dernier cas, ce qu'on pourrait avoir tendance à faire spontanément.

Un dernier exercice. Si vous le souhaitez vous pouvez faire l'exercice suivant qui montre que "faire de la géonétrie affine, c'est la même chose que faire de l'algèbre linéaire en dimension un de plus, en s'étant fixé une forme linéaire." Vous aviez peut-être déjà fait ce constat, le calcul en coordonnées barycentriques consistant essentiellement en de l'algèbre linéaire en dimension "un de plus", avec une attention toute particulière apportée à la forme linéaire "somme des coordonnées".

Voici l'exercice : *soit* k *un corps, soient* E *et* F *deux* k*-espaces vectoriels, et soient* φ *(resp.* ψ*) une forme linéaire* non nulle *sur* E *(resp.* F*). On note* X *(resp.* Y*) le sous-espace affine de* E *(resp. de* F*) formé des* x *en lesquels* φ *(resp.* ψ*) vaut 1.*

Montrez que l'application $u \mapsto u_{|X}$ *établit une* bijection *entre l'ensemble des applications* k*-linéaires de* E *dans* F *vérifiant* $\psi \circ u = \varphi$ *et l'ensemble des applications affines de* X *vers* Y.