Formule de Burnside : ras-le-bol du collier de perles !

Michel Coste - Juin 2007

Il y a 76 colliers de perles différents avec quatre perles bleues, trois blanches et deux oranges.

Cette jolie application de la formule de Burnside pour le groupe diédral D_9 peut se placer dans diverses leçons et s'est retrouvée cette année dans beaucoup de développements proposés en préparation de leçons ou en oral blanc. Elle vient du livre de F. Combes : Algèbre et Géométrie (p. 44). Si elle est proposée trop souvent toujours sous la même forme, le jury risque de s'en lasser et de développer une allergie à son endroit. On peut citer un agacement déjà ancien du jury à propos d'une autre question concernant les groupes

> Les théorèmes de Sylow permettent de démontrer facilement que pour certains nombres premiers p et q , tout groupe d'ordre p^2q n'est jamais simple. Il est souhaitable de varier les exemples et de ne pas se cantonner au groupe d'ordre 63.

On peut bien sûr modifier le problème du collier de perles en changeant les couleurs, mais il n'est pas sûr que ceci trompe le jury. Nous proposons ici quelques pistes pour varier les exemples d'application de la formule de Burnside.

Déjà, quelques rappels sur la formule elle-même (elle figurait explicitement dans le programme du concours il y a quelques années). Cette formule, qui concerne un groupe fini G opérant sur un ensemble fini S, s'écrit :

$$|G| \times \text{nombre d'orbites} = \sum_{g \in G} |S^g| \ ,$$

où les barres désignent le cardinal d'un ensemble et S^g est l'ensemble des éléments de S fixés par g. L'idée est de compter de deux manières différentes le nombre de couples $(g,s) \in G \times S$ tels que $g \cdot s = s$ et de se souvenir que $|G| = |G_s| \times |G \cdot s|$, où G_s est le stabilisateur de s et $G \cdot s$ son orbite. La démonstration facile figure dans la référence déjà citée, dans le livre d'Armstrong : Groups and Symmetry, p.98, et est proposée dans l'exercice 7, page 196 du livre de M. Artin : Algebra, ou dans l'exercie 17, p. 202 du livre de J. Calais : Éléments de théorie des groupes.

Des exemples d'application de la formule de Burnside, différents du fameux collier de perles, figurent dans le livre cité ci-dessus d'Armstrong (pour les groupes $\mathcal{S}_4$ - colorier un cube, $\mathcal{A}_4$ - poser des bandes de couleurs sur les faces d'un cube, et D_{10} - colorier un ruban de Moebius) et dans l'exercice 8 page 196 du livre d'Artin (pour D_8 - colorier les côtés d'un octogone). Voici un exemple avec un groupe un peu plus gros.

Une société fabrique la collection de tous les dodécaèdres réguliers (de même taille) avec six faces noires et six faces blanches. Combien y a-t-il de modèles différents ?

Dans ce problème, S est l'ensemble des façons de poser six faces noires sur un dodécaèdre (douze faces), sans identification par les rotations, et G est le groupe des rotations du dodécaèdre agissant sur S. Le cardinal de S est $\binom{12}{6}$. Le nombre de modèles distincts est le nombre d'orbites.

Le livre d'Artin (par exemple) contient les informations sur le dodécaèdre et son groupe de rotations. On peut compter les arêtes (30) et les sommets (20) du dodécaèdre en sachant que chaque face a 5 sommets et 5 arêtes, qu'une arête est commune à deux faces et un sommet à trois faces. Le groupe des rotations du dodécaèdre agit simplement et transitivement sur les couples formés d'un sommet et d'une arête partant de ce sommet, ce qui donne $|G| = 20 \times 3 = 60$. Ce groupe comprend (voir p. 200) :

- L'identité.
- Les rotations d'ordre 2 d'axe passant par les milieux d'arêtes opposées (il y en a $30/2 = 15$).
- Les rotations d'orde 3 d'axe passant par deux sommets opposés (il y en a $2 \times (20/2) = 20$).
- Les rotations d'ordre 5 d'axe passant par les centres de faces opposées (il y en a $4 \times (12/2) = 24$).

Ceci fait bien 60 au total, et on a donc la liste complète[1].

Il reste à calculer $|S_g|$ pour chaque rotation g.

- Pour l'identité, c'est bien sûr $|S|$.
- Soit g une rotation d'ordre deux. Elle n'envoie aucune face sur elle même (une rotation qui envoie une face sur elle-même doit laisser fixe son centre, donc c'est l'identité ou une rotation d'axe pasant par les centres de faces opposées). Il y a 6 orbites à deux éléments pour l'action de g sur l'ensemble des faces, et un coloriage est fixe par g si et seulement si les deux faces dans chaque orbite sont de même couleur. Comme on veut autant de faces noires que de blanches, on obtient $|S_g| = \binom{6}{3}$.
- Soit g une rotation d'ordre trois. On raisonne comme ci-dessus, en constatant qu'il y a 4 orbites à trois éléments pour l'action de g sur l'ensemble des faces. Donc $|S_g| = \binom{4}{2}$.
- Soit g une rotation d'ordre 5. Cette fois-ci il y a deux faces fixes pour l'action de g et deux orbites composées chacune de 5 faces. Les deux faces fixes doivent être de couleurs différentes et les deux orbites aussi, ce qui donne $|S_g] = 2 \times 2 = 4$.

La formule de Burnside nous donne, pour le nombre d'orbites sous G dans S :

$$\frac{1}{60}\left(\binom{12}{6} + 15 \times \binom{6}{3} + 20 \times \binom{4}{2} + 24 \times 4\right) = 24\,.$$

Un exercice un peu plus périlleux du point de vue des calculs est le problème analogue pour les dodécaèdres avec dix faces blanches et dix noires. On trouve alors 3158 modèles différents.

Une autre façon de varier l'application de la formule de Burnside, en restant avec les colliers de perles, est de poser le problème général suivant :

[1]Digression par rapport à la formule de Burnside : on peut, en suivant Artin, établir l'équation aux classes (attention, les rotations d'ordre 5 forment deux classes de conjugaison suivant qu'elles ont un angle $\pm 2\,\pi/5$ ou $\pm 4\,\pi/5$)

$$60 = 1 + 15 + 20 + 12 + 12\,,$$

et en déduire la simplicité du groupe des rotations, puis son isomorphisme avec le groupe alterné A_5

Combien peut on faire de colliers à neuf perles différents avec n_1 perles bleues, n_2 blanches et n_3 oranges ($n_1 + n_2 + n_3 = 9$) ?

Une réponse est donnée par un théorème de Polya (voir Comtet : Analyse combinatoire, tome 2, p. 90). La clé est encore la formule de Burnside. Ici S est l'ensemble des coloriages de type (n_1, n_2, n_3) de l'ensemble P des sommets d'un polygone régulier à 9 côtés (avec n_1 sommets bleus, n_2 blancs et n_3 oranges) sans identification par l'action de D_9. Un coloriage est fixé par un élément g de D_9 si et seulement si tous les sommets dans une même orbite dans P sous l'action de g (c.-à-d. sous l'action du groupe cyclique engendré par g) ont même couleur. Il est alors donné par le choix d'une couleur pour chaque orbite dans P sous l'action de g.

Associons une indéterminée X_i $(i = 1, 2, 3)$ à chaque couleur. La discussion précédente devrait vous convaincre que le cardinal $|S^g|$ de l'ensemble des coloriages de type (n_1, n_2, n_3) fixés par g est le coefficient de $X_1^{n_1} X_2^{n_2} X_3^{n_3}$ dans le polynôme

$$\prod_{\sigma \text{ orbite dans } P \text{ sous } g} \left(X_1^{|\sigma|} + X_2^{|\sigma|} + X_3^{|\sigma|} \right) .$$

D'après la formule de Burnside, le nombre de modèles différents est donc le coefficient de $X_1^{n_1} X_2^{n_2} X_3^{n_3}$ dans le polynôme

$$W = \frac{1}{|D_9|} \sum_{g \in D_9} \left(\prod_{\sigma \text{ orbite dans } P \text{ sous } g} \left(X_1^{|\sigma|} + X_2^{|\sigma|} + X_3^{|\sigma|} \right) \right) .$$

Pour appliquer cette formule, on utilise bien entendu la description des éléments de D_9 et de leurs orbites dans P :

- l'identité avec neuf orbites à un élément,
- deux rotations d'ordre 3 avec trois orbites à trois éléments,
- six rotations d'ordre 9 avec une orbite à neuf éléments,
- neuf symétries avec une orbite à un élément et quatre à deux éléments.

Le polynôme W est donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{18} \Big(\quad & (X_1 + X_2 + X_3)^9 \\ & +2\,(X_1^3 + X_2^3 + X_3^3)^3 \\ & +6\,(X_1^9 + X_2^9 + X_3^9) \\ & +9\,(X_1 + X_2 + X_3)\,(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2)^4 \quad \Big) . \end{aligned}$$

Ceci permet de retrouver le résultat pour $n_1 = 4$, $n_2 = 3$, $n_3 = 2$. On remarque que la seule façon d'obtenir $X_1^4 X_2^3 X_3^2$ dans le dernier terme de la somme est d'avoir $X_1^4 X_2^2 X_3^2$ dans le développement de $(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2)^4$, et on obtient :

$$\frac{1}{18} \left(\frac{9!}{4!\,3!\,2!} + 2 \times 0 + 6 \times 0 + 9 \times \frac{4!}{2!} \right) = 76 .$$

Le polynôme W apporte bien entendu bien d'autres informations, comme le nombre total de colliers avec toutes les répartitions possibles des trois couleurs, qui est la somme de tous les coefficients :

$$W(1,1,1) = \frac{1}{18} \left(3^9 + 2 \times 3^3 + 6 \times 3 + 9 \times 3 \times 3^4 \right) = 1219 .$$

On peut faire calculer ces coefficients de W par Maple - malheureusement pas pour l'oral d'algèbre.

```
> S:=i-> X1^i + X2^i +X3^i;
```

$$S := i \to X1^i + X2^i + X3^i$$

```
> W:=(S(1)^9+ 2*S(3)^3+ 6*S(9) + 9*S(1)*S(2)^4)/18;
```

$$\mathrm{W} := \frac{(X1 + X2 + X3)^9}{18} + \frac{(X1^3 + X2^3 + X3^3)^3}{9} + \frac{X1^9}{3} + \frac{X2^9}{3} + \frac{X3^9}{3} + \frac{(X1 + X2 + X3)\,(X1^2 + X2^2 + X3^2)^4}{2}$$

```
> expand(W);
```

$$\begin{aligned}
&16\,X1\,X2^6\,X3^2 + 76\,X1^3\,X2^2\,X3^4 + 76\,X1^3\,X2^4\,X3^2 + 28\,X1\,X2^3\,X3^5 + 94\,X1^3\,X2^3\,X3^3\\
&+ 4\,X1\,X2^7\,X3 + 76\,X1^4\,X2^2\,X3^3 + 16\,X1^2\,X2\,X3^6 + 38\,X1^4\,X2^4\,X3\\
&+ 28\,X1^3\,X2\,X3^5 + 76\,X1^4\,X2^3\,X3^2 + 76\,X1^2\,X2^3\,X3^4 + 28\,X1\,X2^5\,X3^3\\
&+ 76\,X1^2\,X2^4\,X3^3 + 4\,X1^7\,X2\,X3 + 28\,X1^5\,X2\,X3^3 + 48\,X1^2\,X2^5\,X3^2\\
&+ 38\,X1\,X2^4\,X3^4 + 16\,X1^6\,X2\,X3^2 + 48\,X1^5\,X2^2\,X3^2 + 28\,X1^3\,X2^5\,X3\\
&+ 4\,X1\,X2\,X3^7 + 28\,X1^5\,X2^3\,X3 + 48\,X1^2\,X2^2\,X3^5 + 16\,X1^2\,X2^6\,X3\\
&+ 38\,X1^4\,X2\,X3^4 + 16\,X1^6\,X2^2\,X3 + 16\,X1\,X2^2\,X3^6 + 10\,X1^5\,X2^4 + 7\,X1^6\,X3^3\\
&+ 7\,X1^6\,X2^3 + 4\,X1^7\,X3^2 + 4\,X1^7\,X2^2 + X1^8\,X3 + X1^8\,X2 + 10\,X1^4\,X3^5\\
&+ 10\,X1^4\,X2^5 + 10\,X1^5\,X3^4 + 7\,X1^3\,X3^6 + 7\,X1^3\,X2^6 + X1^9 + X2^9 + X3^9\\
&+ 4\,X1^2\,X2^7 + 4\,X1^2\,X3^7 + X1\,X2^8 + X1\,X3^8 + X2^8\,X3 + 4\,X2^7\,X3^2 + 7\,X2^6\,X3^3\\
&+ 10\,X2^5\,X3^4 + 10\,X2^4\,X3^5 + 7\,X2^3\,X3^6 + 4\,X2^2\,X3^7 + X2\,X3^8
\end{aligned}$$

```
> subs({X1=1,X2=1,X3=1},W);
```

$$1219$$