Le dual en dimension infinie

Soient k un corps et E un k-espace vectoriel de dimension *infinie*. Nous voulons démontrer dans cette note le résultat suivant : *l'espace vectoriel dual E^* n'est pas isomorphe à E.*

Ce résultat est « bien connu » mais il est difficile d'en trouver une démonstration dans la littérature. On le trouve démontré aux pages 244-248 de Jacobson, *Lectures in Abstract Algebra II*, édité par Springer-Verlag. La preuve de Jacobson, assez longue, est aussi valable pour les espaces vectoriels sur un corps gauche (i.e. non commutatif). La preuve simple donnée ci-dessous est due à Andrea Ferretti.

Rappelons que tout espace vectoriel possède une base $\{e_i\}_{i\in I}$ (c'est un corollaire du lemme de Zorn), ce qui veut dire que E est isomorphe à l'espace vectoriel $k^{(I)}$ des fonctions à support fini de I dans k. La *dimension* de E est par définition égale au *cardinal* de I, et le résultat énoncé ci-dessus résultera de l'affirmation plus précise que $\dim(E) < \dim(E^*)$.

1 Un peu de théorie des ensembles

On dispose de deux bonnes références qui donnent un bref aperçu des bases de la théorie des ensembles : l'annexe B de Lang, *Algèbre* (Dunod) et le livre de Halmos, *Introduction à la théorie des ensembles* (Gabay) pour un exposé un peu plus complet.

1.1 L'ensemble de tous les ensembles. Commençons par rappeler le célèbre *paradoxe de Russell* qui dit qu'*il n'existe pas d'ensemble de tous les ensembles.* En effet, supposons qu'il existe un tel ensemble $\mathscr{E}$, et notons $A = \{X \in \mathscr{E},\ X \notin X\}$ l'ensemble des éléments de $\mathscr{E}$ qui n'appartiennent pas à eux-mêmes. Posons-nous la question : est-ce que $A \in A$? Si oui, par définition cela veut dire que $A \notin A$ ce qui est contradictoire. Si non, par définition cela veut dire que $A \in A$ ce qui est contradictoire. On obtient donc un objet A qui ne peut exister.

1.2 Les cardinaux. Soient A et B deux ensembles. S'il existe une bijection $A \to B$, on dit que *A et B ont même cardinal* et on écrit $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(B)$. S'il existe une injection $A \to B$, ou de manière équivalente (c'est facile) s'il existe une surjection $B \to A$, on écrit $\mathrm{card}(A) \leqslant \mathrm{card}(B)$, ou $\mathrm{card}(B) \geqslant \mathrm{card}(A)$. S'il existe une injection mais pas de bijection entre A et B, on écrit $\mathrm{card}(A) < \mathrm{card}(B)$. Il est clair que $\mathrm{card}(A) \leqslant \mathrm{card}(B)$ et $\mathrm{card}(B) \leqslant \mathrm{card}(C)$ implique $\mathrm{card}(A) \leqslant \mathrm{card}(C)$.

1.3 Quelques « calculs » de cardinaux.

Théorème (Cantor-Schröder-Bernstein). *Si* $\mathrm{card}(A) \leqslant \mathrm{card}(B)$ *et* $\mathrm{card}(B) \leqslant \mathrm{card}(A)$ *alors* $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(B)$.

Preuve : voir Lang, Annexe B, Th. B.3.1.

Lemme 1. *Notons $\mathcal{P}(A)$ l'ensemble des parties de A. Alors* $\mathrm{card}(\mathcal{P}(A)) > \mathrm{card}(A)$.

Preuve : L'application $A \to \mathcal{P}(A)$ qui envoie a sur $\{a\}$ est injective donc $\mathrm{card}(\mathcal{P}(A)) \geqslant \mathrm{card}(A)$. Supposons qu'il existe une bijection $f : A \to \mathcal{P}(A)$, notons $B = \{a \in A,\ a \notin f(a)\}$ et soit $a_0 \in A$ dont l'image par la bijection f est B. Si $a_0 \in B$, par définition on a $a_0 \notin f(a_0) = B$ ce qui est impossible. Si $a_0 \notin B$, par définition on a $a_0 \in f(a_0) = B$ ce qui est impossible. Donc f n'existe pas.

Lemme 2. *Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel et A^n le produit cartésien n-uple de A. Si A est infini, alors* $\mathrm{card}(A^n) = \mathrm{card}(A)$.

Preuve : voir Lang, Annexe B, Cor. B.3.7.

Lemme 3. *Notons $\mathcal{P}_*(A)$ l'ensemble des parties finies de A. Si A est infini alors* $\mathrm{card}(\mathcal{P}_*(A)) = \mathrm{card}(A)$.

Preuve : voir Lang, Annexe B, Cor. B.3.9.

2 Dual en dimension infinie

Nous utiliserons les résultats classiques rappelés dans la partie précédente sous la forme suivante.

Lemme 4. *Soient A, B deux ensembles et $z \in B$. Notons $B^{(A)}$ l'ensemble des applications $f : A \to B$ telles que $f^{-1}(B \setminus \{z\})$ est fini. Si A est infini et* $\mathrm{card}(A) \geqslant \mathrm{card}(B) \geqslant 2$, *alors* $\mathrm{card}(B^{(A)}) = \mathrm{card}(A)$.

Dans notre application, le point z sera le zéro d'un espace vectoriel et les éléments de $B^{(A)}$ seront donc les fonctions à support fini.

Preuve : Comme $\mathrm{card}(B) \geqslant 2$, il existe $b \in B \setminus \{z\}$. L'application $A \to B^{(A)}$ qui envoie a sur l'indicatrice de $\{a\}$, définie par $f(a) = b$ et $f(x) = z$ si $x \neq a$, est injective. D'après le théorème de Cantor-Schröder-Bernstein, il suffit donc de construire une injection $B^{(A)} \hookrightarrow A$. Pour tout $f \in B^{(A)}$, notons $S_f = f^{-1}(B \setminus \{z\})$. Comme chaque f est déterminée par sa restriction à S_f, et compte tenu de l'hypothèse $\mathrm{card}(A) \geqslant \mathrm{card}(B)$, on conclut avec la suite d'injections :

$$B^{(A)} \simeq \coprod_{S\in\mathcal{P}_*(A)} B^S \overset{\boxed{\text{Lm 3}}}{\overset{\downarrow}{\simeq}} \coprod_{a\in A} B = A \times B \overset{\boxed{\text{Hyp.}}}{\overset{\downarrow}{\hookrightarrow}} A \times A \overset{\boxed{\text{Lm 2}}}{\overset{\downarrow}{\simeq}} A.$$

Nous arrivons maintenant au résultat qui nous intéresse.

Théorème 2.1 *Soient k un corps, E un k-espace vectoriel de dimension* infinie *et E^* l'espace vectoriel dual. Alors* $\dim(E) < \dim(E^*)$. *En particulier, E^* n'est pas isomorphe à E.*

Démonstration : Rappelons que tout espace vectoriel possède une base : c'est un corollaire du lemme de Zorn. La donnée d'une base $\{e_i\}_{i\in I}$ de E équivaut à celle d'un isomorphisme entre E et l'espace vectoriel $k^{(I)}$ des fonctions à support fini de I dans k : l'isomorphisme en question envoie $x = \sum x_i e_i$ sur la fonction à support fini f telle que $f(i) = x_i$. La dimension de E est égale par définition au cardinal de I. Enfin, il est facile de voir que le dual E^* s'identifie alors à l'espace vectoriel k^I de *toutes* les fonctions de I dans k, car une forme $\varphi : E \to k$ est déterminée par sa valeur sur chaque e_i et réciproquement.

Notons ℓ le sous-corps premier de k, c'est-à-dire son plus petit sous-corps ; à isomorphisme près, c'est $\mathbb{Q}$ ou un corps fini $\mathbb{F}_p$. Considérons le ℓ-espace vectoriel $F = \ell^{(I)}$. On note F^* le dual ℓ-linéaire, isomorphe à ℓ^I. On a :

$$\mathrm{card}(F^*) = \mathrm{card}(\ell^I) \geqslant \mathrm{card}(\{0,1\}^I) = \mathrm{card}(\mathcal{P}(I)) > \mathrm{card}(I)$$

d'après la bijection bien connue $\{0,1\}^I \simeq \mathcal{P}(I)$ et le Lemme 1. Par ailleurs, comme ℓ est au plus dénombrable (i.e. de cardinal inférieur ou égal à celui de $\mathbb{N}$) et I est infini, on a $\mathrm{card}(I) \geqslant \mathrm{card}(\ell) \geqslant 2$. Utilisant le Lemme 4, on trouve $\mathrm{card}(F) = \mathrm{card}(I) < \mathrm{card}(F^*)$. En particulier $\dim_\ell(F) < \dim_\ell(F^*)$.

Montrons maintenant que $\dim_\ell F^* \leqslant \dim_k E^*$. Il suffit de démontrer que pour toute famille ℓ-libre d'applications $\varphi_s : I \to \ell$, $s \in S$, la famille $\varphi'_s = \varphi_s : I \to \ell \subset k$ est k-libre. Considérons une combinaison linéaire (finie) nulle $\sum_s \alpha_s \varphi'_s = 0$ avec $\alpha_s \in k$. Notons $\{f_j\}_{j \in J}$ une base de k comme ℓ-espace vectoriel, et écrivons $\alpha_s = \sum_j \alpha_{sj} f_j$ sur cette base, avec $\alpha_{sj} \in \ell$. Pour tout i, on a :

$$0 = \sum_{s,j} \alpha_{sj} f_j \varphi_s(i) = \sum_j \Big(\sum_s \alpha_{sj} \varphi_s(i) \Big) f_j$$

donc $\sum_s \alpha_{sj} \varphi_s(i) = 0$ pour tout j, puisque $\{f_j\}$ est une base. Ceci montre que $\sum_s \alpha_{sj} \varphi_s = 0$ comme applications de I dans ℓ, et comme les φ_s sont ℓ-libres, on trouve $\alpha_{sj} = 0$ pour tous s, j. Finalement $\alpha_s = 0$ donc la famille des φ'_s est libre.

On conclut en alignant ces inégalités : $\dim_k(E) = \dim_\ell(F) < \dim_\ell(F^*) \leqslant \dim_k(E^*)$. $\square$

Références

Lang, *Algèbre*, Annexe B, Dunod.
Halmos, *Introduction à la théorie des ensembles*, Gabay.