Endomorphismes partiellement isométriques et norme

Leçons concernées :

Exemples d'applications des idéaux d'un anneau commutatif unitaire.
Anneaux principaux.
Sous-espaces stables d'un endom. d'un espace vectoriel de dim. finie. Applications.
Polynômes d'endomorphismes. Applications.
Formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications.
Dualité en dimension finie.

$\therefore$

Soit E un espace vectoriel euclidien (de dimension finie n), de produit scalaire noté $\langle , \rangle$.

On dit qu'un endomorphisme $u \in \mathrm{L}(E)$ est *partiellement isométrique* (en abrégé PI) ssi $\| u(x) \| = \| x \|$, pour tout $x \in (\ker(u))^\perp$. On rappelle que cela équivaut à dire que $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$, pour tous $x, y \in (\ker(u))^\perp$, ou encore que u^*u est un projecteur orthogonal.

Enfin, on rappelle que si $s \in \mathrm{L}(E)$ est un endomorphisme symétrique positif, il existe un unique endomorphisme symétrique positif r tel que $s = r^2$, appelé la racine carrée de s. Si $f \in \mathrm{L}(E)$ est quelconque, on note $|f|$ la racine carrée de f^*f. C'est donc un endomorphisme symétrique positif. Nous allons montrer :

Théorème : Soit $f \in \mathrm{L}(E)$.

(1) *pour tout v PI on a* $\mathrm{tr}(vf) \le \mathrm{tr}(|f|)$.

(2) $N(f) = \mathrm{tr}(|f|)$ *est une norme sur* $\mathrm{L}(E)$ *avec* $N(f) = \mathrm{tr}(f)$ *si f est symétrique positif.*

Lemme 1 : $\ker f = \ker |f|$.

Preuve : On montre d'abord que $\ker f = \ker f^*f$, pour cela seule $\supset$ est à montrer. Or $f^*fx = 0$ implique $\| fx \|^2 = \langle f^*fx, x \rangle = 0$.

Ceci se réécrit $\ker f = \ker |f|^2$. On en déduit le lemme en appliquant cela à f et $|f|$, observant que $|f|$ a même module que f. □

Lemme 2 : $\exists !\, u \in \mathrm{L}(E)$ *qui soit PI avec* $|f| = uf$, $(\ker(u))^\perp = \mathrm{im}(f)$ *et* $u^*uf = f$.

Preuve : Sur $\mathrm{im}(f)$ on définit u par $u(f(y)) = |f|(y)$. Ceci est légitime car d'après le lemme 1, si $f(y) = 0$ alors $|f|(y) = 0$. Sur $(\mathrm{im}(f))^\perp$ on définit u par $u(x) = 0$. On a ainsi défini un endomorphisme u sur E, tel que $uf = |f|$ et $(\ker(u))^\perp = \mathrm{im}(f)$, manifestement unique avec ces propriétés. Il reste à voir qu'il est PI et que $u^*uf = f$.

Sur $(\ker(u))^\perp = \mathrm{im}(f)$, u est isométrique car pour $x = f(y)$ on a

$$\| ux \|^2 = \| \, |f|(y) \|^2 = \langle |f|(y), |f|(y) \rangle = \langle |f|^2(y), (y) \rangle = \langle f^*f(y), y \rangle = \| f(y) \|^2 = \| x \|^2$$

Alors u^*u est le projecteur orthogonal sur $(\ker(u))^\perp = \mathrm{im}(f)$ et il en découle immédiatement que $u^*uf = f$. □

Preuve du théorème : On utilisera le fait suivant noté $(*)$: si p est un projecteur orthogonal et f un endormophisme symétrique positif, alors $\mathrm{tr}(pf) \leq \mathrm{tr}(f)$. Pour voir cela on choisit une base orthonormale $\{e_i\}$ qui diagonalise p, de sorte que $p(e_i) = e_i$ sur $\mathrm{im}(p)$ et $p(e_i) = 0$ sur $\ker(p)$. Alors

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(pf) &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} \langle pfe_i, e_i\rangle = \sum \langle fe_i, p^* e_i\rangle = \sum \langle fe_i, pe_i\rangle \\ &= \sum_{e_i \in \mathrm{im}(p)} \langle fe_i, e_i\rangle \leq \sum_{e_i \in \mathrm{im}(p)} + \sum_{e_i \in \ker(p)} = \mathrm{tr}(f)\end{aligned}$$

où l'inégalité provient du fait que f est positif.

On va montrer l'énoncé un peu plus fort : si f est symétrique positif, pour tous u, v PI on a $\mathrm{tr}(uvf) \leq \mathrm{tr}(f)$. Soit g la racine carrée de f et fixons une base orthonormée $\{e_i\}$. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(uvf) &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} \langle uvfe_i, e_i\rangle = \sum\langle g^2 e_i, v^* u^* e_i\rangle = \sum\langle ge_i, gv^* u^* e_i\rangle \\ &\leq \textstyle\sum \| ge_i \| \, \| gv^* u^* e_i \| \quad \text{par Cauchy-Schwarz} \\ &\leq \sqrt{\textstyle\sum \| ge_i \|^2} \sqrt{\textstyle\sum \| gv^* u^* e_i \|^2} \text{ par Cauchy-Schwarz encore.}\end{aligned}$$

Or d'une part

$$\sum \| ge_i \|^2 = \sum \langle ge_i, ge_i\rangle = \sum \langle g^2 e_i, e_i\rangle = \mathrm{tr}(g^2) = \mathrm{tr}(f)$$

D'autre part,

$$\sum \| gv^* u^* e_i \|^2 = \sum \langle uvg^2 v^* u^* e_i, e_i\rangle = \mathrm{tr}(uvfv^* u^*) = \mathrm{tr}((u^* u) vfv^*) \overset{(*)}{\leq} \mathrm{tr}(vfv^*) = \mathrm{tr}(v^* vf) \overset{(*)}{\leq} \mathrm{tr}(f)$$

où les deux inégalités proviennent du fait $(*)$ ci-dessus. Ceci conclut notre calcul, et permet de montrer (1).

Passons au point (2), i.e. à la vérification du fait qu'on a une norme.

D'abord $|f|$ est symétrique positif, donc diagonalisable à valeurs propres positives. Il s'ensuit que $N(f) = \mathrm{tr}(|f|) \geq 0$ et aussi que si $N(f) = 0$ alors toutes ses valeurs propres sont nulles, donc $|f|$ qui est diagonalisable est nul, donc f aussi puisque $\ker f = \ker |f|$ (lemme 1).

Ensuite clairement $N(\lambda f) = |\lambda| N(f)$.

Enfin pour $f, g \in \mathrm{L}(E)$ quelconques, par le lemme 2 on peut choisir u PI tel que $|f+g| = u(f+g)$. On a alors, utilisant le point (1),

$$N(f+g) = \mathrm{tr}(uf) + \mathrm{tr}(ug) \leq \mathrm{tr}(|f|) + \mathrm{tr}(|g|) = N(f) + N(g)$$

Le théorème est prouvé. □

Bibliographie

[Gug] Gugger, Problèmes corrigés de mathématiques posés au concours de Polytechnique, Tome 6, *Ellipses*.