1e épreuve agrégation interne 2011 - Corrigé

Michel Coste

12 mars 2011

A Exemples

A.1 Exemple 1 : un graphe linéaire

$$L = \begin{pmatrix} 1 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice $L - I_3$ est de rang 2 avec les deux dernières colonnes égales. Donc 1 est valeur propre de multiplicité 1 et le sous-espace propre associé est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. On voit aussi sans peine que la matrice que la matrice L elle-même est de rang 2, car la première colonne est égale à $-1/\sqrt{2}$ fois la somme des deux autres. Donc 0 est valeur propre de multiplicité 1 et le sous-espace propre associé est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Comme la trace est 3, la dernière valeur propre est 2, et de la contemplation de $L-2I_3$ on tire facile que le sous-espace propre associé est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Une b.o.n. de vecteurs propres est $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right)$

A.2 Exemple 2 : le graphe complet

2-a) La matrice L du graphe complet K_n a des $-1/(n-1)$ partout, sauf sur la diagonale où il y a des 1. Donc $L = \dfrac{-1}{n-1}\, J + \dfrac{n}{n-1} I_n$.

2-b) La matrice J est de rang 1, et sa valeur propre non nulle évidente est n. Les valeurs propres pour L sont donc $\dfrac{n}{n-1}$ de multiplicité $n-1$ et $\dfrac{-n}{n-1} + \dfrac{n}{n-1} = 0$ de multiplicité 1.

A.3 Exemple 3 : le graphe cyclique à n sommets

3-a) Soit

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) .$$

C'est une matrice de permutation associée à un cycle de longueur n, donc $C^n = I^n$. Une valeur propre de C ne peut donc être qu'une racine n-ème de l'unité de la forme ω^k où $\omega = e^{2i\pi/n}$. Réciproquement, chaque ω^k, avec $k = 0, 1, \dots, n-1$, est bien valeur propre de C, avec comme sous-espace propre associé la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ \omega^{-k} \\ \omega^{-2k} \\ \vdots \\ \omega^{-(n-1)k} \end{pmatrix}$. Ceci fournit une base de vecteurs propres pour C.

3-b) Soit $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ et $M = (a_{(i-j) \bmod n})_{1 \le i,j \le n}$. Alors $M = a_0 I_n + a_1 C + \cdots + a_{n-1} C^{n-1} = P(C)$. Puisque C est diagonalisable de valeurs propres les ω^k, pour $k = 0, \ldots, n-1$, la matrice M est diagonalisable dans la même base de vecteurs propres que C, avec pour valeurs propres les $P(\omega^k)$, pour $k = 0, \ldots, n-1$.

3-c) On applique le résultat précédent à la matrice

$$L = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \ ,$$

avec $P = 1 - \dfrac{1}{2} X - \dfrac{1}{2} X^{n-1}$. Les valeurs propres de L sont donc les $1 - (\omega^k + \omega^{-k})/2$, pour $k = 0, \ldots, n-1$. Or $(\omega^k + \omega^{-k})/2 = \cos(2k\pi/n) = 1 - 2\sin^2(k\pi/n)$. Les valeurs propres de L sont donc les $2\sin^2(k\pi/n)$ pour $k = 0, \ldots, n-1$; il y a des répétitions dans cette liste, du fait de l'égalité $\sin(k\pi/n) = \sin(\pi - k\pi/n)$. Les valeurs propres distinctes sont :

- Quand n est pair, $0 = 2\sin^2(0)$ et $2 = 2\sin^2(\pi/2)$ chacun avec multiplicité 1, les $2\sin^2(k\pi/n)$ pour $k = 1, \ldots, \dfrac{n}{2} - 1$ chacun avec multiplicité 2. La plus grande valeur propre est 2.
- Quand n est impair, $0 = 2\sin^2(0)$ avec multiplicité 1 et les $2\sin^2(k\pi/n)$ pour $k = 1, \ldots, \dfrac{n-1}{2}$ chacun avec multiplicité 2. La plus grande valeur propre est $2\sin^2((n-1)\pi/2n) < 2$.

B Quelques généralités

On rappelle que l'énoncé suppose $d_i \ge 1$ pour tout i. Cette condition entraîne aussi $n > 1$.

B.1

1-a On a, en remarquant que d_i est le nombre de j tels que $j \sim i$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\sim i}\left(\frac{x(i)}{\sqrt{d_i}} - \frac{x(j)}{\sqrt{d_j}}\right)^2 &= \frac{1}{2}\sum_{(i,j),\ i\sim j}\left(\frac{x(i)}{\sqrt{d_i}} - \frac{x(j)}{\sqrt{d_j}}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} x(i)^2 - 2\sum_{(i,j), i\sim j}\frac{x(i)x(j)}{\sqrt{d_i d_j}} + \sum_{j=1}^{n} x(j)^2\right) = \langle \mathcal{L}x, x\rangle \ . \end{aligned}$$

Puisque pour chaque arête $a = \{i,j\} \in A$, il y a deux couples (i,j) et (j,i) vérifiant la relation symétrique $\sim$, on en déduit

$$\langle \mathcal{L}x, x\rangle = \sum_{a=\{i,j\}\in A}\left(\frac{x(i)}{\sqrt{d_i}} - \frac{x(j)}{\sqrt{d_j}}\right)^2 \ .$$

1-b L'égalité établie ci-dessus montre que la forme quadratique $x \mapsto \langle \mathcal{L}x, x\rangle$ est semi-définie positive, c.-à-d. que $\langle \mathcal{L}x, x\rangle \ge 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}^n$. Une forme quadratique semi-définie positive vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwarz ; montrons-le dans notre cas.
Soient a, b, c trois nombres réels tels que $at^2 + bt + c \ge 0$ pour tout $t \in \mathbf{R}$. On sait qu'alors $b^2 - 4ac \le 0$ (y compris quand $a = 0$, puisque $bt + c \ge 0$ pour tout $t \in \mathbf{R}$ implique $b = 0$). Il suffit d'appliquer ceci à

$$0 \le \langle \mathcal{L}(tx+y), tx+y\rangle = \langle \mathcal{L}x, x\rangle t^2 + 2\langle \mathcal{L}x, y\rangle t + \langle \mathcal{L}y, y\rangle$$

pour obtenir que $\langle \mathcal{L}x, y\rangle^2 \leq \langle \mathcal{L}x, x\rangle \langle \mathcal{L}y, y\rangle$ pour tous $x, y \in \mathbf{R}^n$.

1-c Soit $x \neq 0$ un vecteur propre de $\mathcal{L}$ et λ la valeur propre associée. Alors l'inégalité

$$0 \leq \langle \mathcal{L}x, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda \|x\|^2$$

montre, puisque $\|x\|^2 > 0$, que $\lambda \geq 0$. Toute valeur propre de $\mathcal{L}$ est donc positive ou nulle.
La formule établie au a) montre que $\langle \mathcal{L}\varphi_1, \varphi_1\rangle = 0$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz établie au b) entraîne alors que $\langle \mathcal{L}\varphi_1, y\rangle = 0$ pour tout $y \in \mathbf{R}^n$, et en particulier que $\|\mathcal{L}\varphi_1\|^2 = 0$. Ainsi $\varphi_1 \in \ker \mathcal{L}$. Puisque le noyau n'est pas réduit à 0, 0 est valeur propre de $\mathcal{L}$ et donc $\lambda_1 = 0$.

B.2

2-a Le graphe G a deux composantes connexes $J_1 = \{1, 2, 3\}$ et $J_2 = \{4, 5, 6, 7\}$.

2-b Puisque $\mathcal{L}$, comme endomorphisme symétrique, est diagonalisable sur $\mathbf{R}$, la multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre associé. Donc $\ker \mathcal{L} = \mathbf{R}\varphi_1$ si et seulement si 0 est valeur propre de multiplicité 1, c.-à-d. si et seulement si $\lambda_2 = 0$.

2-c Si $x \in \ker \mathcal{L}$, on a $\langle \mathcal{L}x, x\rangle = 0$ et alors la formule établie au B-1-a) montre que pour toute arête $\{i, j\} \in A$ on a $\dfrac{x(i)}{\sqrt{d_i}} = \dfrac{x(j)}{\sqrt{d_j}}$. On en déduit que $\dfrac{x(i)}{\sqrt{d_i}} = \dfrac{x(j)}{\sqrt{d_j}}$ si les sommets i et j sont reliés par un chemin dans le graphe.

2-d Supposons G connexe. Si $x \in \ker \mathcal{L}$, on déduit de c) qu'il existe une constante $c \in \mathbf{R}$ telle que $\dfrac{x(i)}{\sqrt{d_i}} = c$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. Mais alors $x = \dfrac{c}{\sqrt{D}}\,\varphi_1$. Ceci montre que $\ker \mathcal{L} = \mathbf{R}\varphi_1$ et donc, d'après b), $\lambda_2 > 0$.

2-e Supposons maintenant G non connexe, et soient $J_1, \ldots, J_r$ ses composantes connexes. Pour $k = 1, \ldots, r$, soit x_k le vecteur qui a pour coordonnées $x_k(i) = \dfrac{x(i)}{\sqrt{d_i}}$ si $i \in J_k$ et $x_k(i) = 0$ sinon. Puisqu'il n'y a aucune arête entre un sommet dans J_k et un sommet dans $[\![1, n]\!] \setminus J_k$, la formule de B-1-a) donne $\langle \mathcal{L}x_k, x_k\rangle = 0$. Le même raisonnement que celui fait en B-1-c) pour φ_1 montre alors que $x_k \in \ker \mathcal{L}$. Comme les $J_1, \ldots, J_r$ forment une partition de $[\![1, n]\!]$, les vecteurs $x_1, \ldots, x_r$ sont linéairement indépendants. On a $\dim(\ker \mathcal{L}) \geq r \geq 2$, d'où $\lambda_2 = 0$.
On conclut que G est connexe si et seulement si $\lambda_2 > 0$. En fait, on peut voir facilement en utilisant ce qu'on vient de faire que le nombre de composantes connexes de G est égal à $\dim(\ker \mathcal{L})$, c-à-d. à la multiplicité de 0 comme valeur propre.

B.3

3-a Dans la base orthonormale $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, un vecteur x s'écrit $x = \sum_{i=1}^n \langle \varphi_i, x\rangle\, \varphi_i$. Puisque φ_i est vecteur propre pour $\mathcal{L}$ de valeur propre associée λ_i, on a $\mathcal{L}x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle \varphi_i, x\rangle\, \varphi_i$. Donc $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle \varphi_i, x\rangle^2$ et $\langle \mathcal{L}x, x\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle \varphi_i, x\rangle^2$.

3-b Rappelons que $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$.
On a, pour tout vecteur x

$$\langle \mathcal{L}x, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle \varphi_i, x\rangle^2 \leq \lambda_n \sum_{i=1}^{n} \langle \varphi_i, x\rangle^2 = \lambda_n \|x\|^2\ .$$

Par ailleurs, $\langle \mathcal{L}\varphi_n, \varphi_n\rangle = \lambda_n \|\varphi_n\|^2$. Donc

$$\lambda_n = \max\left\{ \frac{\langle \mathcal{L}x, x\rangle}{\|x\|^2}\ ;\ x \in \mathbf{R}^n,\ x \neq 0 \right\}\ .$$

On a, pour tout vecteur x tel que $\langle \varphi_1, x\rangle = 0$

$$\langle \mathcal{L}x, x\rangle = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i \langle \varphi_i, x\rangle^2 \geq \lambda_2 \sum_{i=1}^{n} \langle \varphi_i, x\rangle^2 = \lambda_2 \|x\|^2\ .$$

Par ailleurs, on a $\langle \varphi_1, \varphi_2\rangle = 0$ et $\langle \mathcal{L}\varphi_2, \varphi_2\rangle = \lambda_2 \|\varphi_2\|^2$. Donc

$$\lambda_2 = \min\left\{ \frac{\langle \mathcal{L}x, x\rangle}{\|x\|^2}\ ;\ x \in \mathbf{R}^n,\ x \neq 0,\ \langle \varphi_1, x\rangle = 0 \right\}\ .$$

C Étude des bornes des valeurs propres

C.1

La trace de $\mathcal{L}$ est n. Comme $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$, on a $n = \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \geq (n-1)\lambda_2$, d'où $\lambda_2 \leq \dfrac{n}{n-1}$.

C.2 Caractérisation du cas où λ_2 est maximale.

2-a Posons $\epsilon(k,\ell) = \left(\dfrac{\varphi(k)}{\sqrt{d_k}} - \dfrac{\varphi(\ell)}{\sqrt{d_\ell}}\right)^2$. Si ni i ni j ne sont des sommets de $\{k,\ell\}$, alors $\varphi(k) = \varphi(\ell) = 0$ et donc $\epsilon(k,\ell) = 0$. Si i est un sommet de $\{k,\ell\}$, alors j n'en est pas un et on a donc $\epsilon(k,\ell) = (\pm\sqrt{d_j}/\sqrt{d_i})^2 = d_j/d_i$. De même, si j est un sommet de $\{k,\ell\}$, alors i n'en est pas un et on a $\epsilon(k,\ell) = d_i/d_j$.

En utilisant la formule du B-1-a), on a

$$\langle \mathcal{L}\varphi, \varphi \rangle = \sum_{\{k,\ell\} \in A} \epsilon_{k,\ell} = d_i \frac{d_j}{d_i} + d_j \frac{d_i}{d_j} = d_j + d_i = \|\varphi\|^2 .$$

2-b On a déjà vu que si $G = K_n$, alors $\lambda_2 = n/(n-1)$. Si $G \neq K_n$, alors on peut trouver dans G deux sommets i et j non voisins, et on peut considérer le vecteur φ du a). C'est un vecteur non nul, qui vérifie $\langle \varphi_1, \varphi \rangle = 0$ et tel que $\langle \mathcal{L}\varphi, \varphi \rangle / \|\varphi\|^2 = 1$. D'après le principe du minimax, on a $\lambda_2 \leq 1 < n/(n-1)$. En conclusion, $\lambda_2 = n/(n-1)$ si et seulement si $G = K_n$.

C.3 Caractérisation du cas où λ_n est maximale.

3-a On remarque que

$$\left(\frac{x(i)}{\sqrt{d_i}} - \frac{x(j)}{\sqrt{d_j}}\right)^2 + \left(\frac{x(i)}{\sqrt{d_i}} + \frac{x(j)}{\sqrt{d_j}}\right)^2 = 2\left(\frac{x(i)^2}{d_i} + \frac{x(j)^2}{d_j}\right) .$$

On a donc

$$\left(\frac{x(i)}{\sqrt{d_i}} - \frac{x(j)}{\sqrt{d_j}}\right)^2 \leq 2\left(\frac{x(i)^2}{d_i} + \frac{x(j)^2}{d_j}\right) ,$$

avec égalité si et seulement si $x(i)/\sqrt{d_i} = -x(j)/\sqrt{d_j}$.

3-b En utilisant la majoration du a), la formule du B-1-a) et en se souvenant que d_i est le nombre d'arêtes de sommet i, on obtient, pour tout vecteur x,

$$\langle \mathcal{L}x, x \rangle \leq 2 \sum_{i=1}^{n} d_i \frac{x(i)^2}{d_i} = 2\|x\|^2 .$$

D'après le principe du minimax, on obtient $\lambda_n \leq 2$.

3-c On suppose G biparti par la partition des sommets en S_1 et S_2. Définissons le vecteur β par $\beta(i) = \sqrt{d_i}$ si $i \in S_1$ et $\beta(i) = -\sqrt{d_i}$ si $i \in S_2$. Alors, pour toute arête $\{i,j\}$ on a

$$\left(\frac{\beta(i)}{\sqrt{d_i}} - \frac{\beta(j)}{\sqrt{d_j}}\right)^2 = 2\left(\frac{\beta(i)^2}{d_i} + \frac{\beta(j)^2}{d_j}\right)$$

d'après le cas d'égalité vu en a) et le fait qu'une arête joint obligatoirement un sommet de S_1 à un sommet de S_2. Donc $\langle \mathcal{L}\beta, \beta \rangle = 2\|\beta\|^2$. Puisque G est connexe, β n'est pas le vecteur nul et d'après le principe du minimax on a $\lambda_n \geq 2$, d'où $\lambda_n = 2$.

3-d On suppose $\lambda_n = 2$. Il existe donc d'après le principe du minimax un vecteur non nul x tel que $\langle \mathcal{L}x, x \rangle = 2\|x\|^2$. Pour toute arête $\{i,j\}$ on doit avoir $x(i)/\sqrt{d_i} = -x(j)/\sqrt{d_j}$ d'après le cas d'égalité vu en a) ; donc ou bien $x(i)x(j) < 0$, ou bien $x(i) = x(j) = 0$. Puisque x est non nul, il existe un sommet k tel que $x(k) \neq 0$; puisque $d_k \geq 1$, il existe une arête $\{k,\ell\}$ de sommet k, et donc $x(k)x(\ell) < 0$. Ceci montre que les ensembles $S_1 = \{i \in [\![1,n]\!] ;\ x(i) > 0\}$ et $S_2 = \{i \in [\![1,n]\!] ;\ x(i) < 0\}$

sont tous les deux non vides. Ils sont disjoints. Leur réunion est $[\![1,n]\!]$. En effet, si le complémentaire $N=\{i\in[\![1,n]\!];\ x(i)=0\}$ de leur réunion était non vide, ceci contredirait la connexité de G puisqu'il ne peut y avoir aucune arête reliant un élément de N à un élément de $S_1\cup S_2$. On conclut que G est biparti, puisque toute arête de G joint un sommet de S_1 et un sommet de S_2.

D À propos du nombre chromatique

D.1

1-a L'énoncé ne précise pas ce qui est entendu par matrice symétrique réelle *positive*. Interprétons-le comme *semi-définie positive* : pour tout $x\in\mathbf{R}^n$, ${}^t x H x\geq 0$ (où ${}^t x$ est le vecteur ligne transposé de x).

Définissons $\pi=\mathbf{R}^p\to\mathbf{R}^n$ par

$$\pi\left(\begin{pmatrix}x(1)\\ \vdots\\ x(p)\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}x(1)\\ \vdots\\ x(p)\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}.$$

Alors, pour tout vecteur $x\in\mathbf{R}^p$, on a ${}^t x H_p x={}^t(\pi(x))H\pi(x)\geq 0$, ce qui montre que H_p est positive.

1-b Soit α_p la plus grande valeur propre de H_p et $v\in\mathbf{R}^p$ un vecteur propre de valeur propre associée α_p. On a

$$\alpha_p=({}^t v H_p v)/\|v\|^2=\left({}^t(\pi(v))H\pi(v)\right)/\|\pi(v)\|^2\leq\alpha\ ,$$

la dernière inégalité étant une conséquence du principe du minimax.

D.2

La matrice symétrique $H=\varphi\,{}^t\varphi$ a toutes ses colonnes colinéaires à φ, et au moins une est non nulle car $\varphi\neq 0$. Elle est donc de rang 1 et 0 est valeur propre de multiplicité $n-1$. De plus $H\varphi=\varphi\,{}^t\varphi\,\varphi=\|\varphi\|^2\,\varphi$, ce qui montre que φ est vecteur propre de H de valeur propre associée $\|\varphi\|^2$, qui est de multiplicité forcément 1.

D.3

3-a On a $D_G\,\varphi_1(i)\,\varphi_1(j)=D_G\,\dfrac{\sqrt{d_i}}{\sqrt{D_G}}\,\dfrac{\sqrt{d_j}}{\sqrt{D_G}}=\sqrt{d_i d_j}$, ce qui fait que $M=D_G\,\varphi_1\,{}^t\varphi_1$. D'après ce qu'on a vu en 2), M a φ_1 comme vecteur propre de valeur propre associée $D_G\|\varphi_1\|^2=D_G$. Si $(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ est la base orthonormale de vecteurs propres pour L du B-3, alors, pour $i\geq 2$, on a $M\varphi_i=0$ car ${}^t\varphi_1\,\varphi_i=0$. Donc $(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ est aussi une base de vecteurs propres pour M, de valeurs propres associées respectivement $D_G,0,\ldots,0$.

Remarque : l'énoncé donne « *Tous les vecteurs propres de L sont aussi des vecteurs propres de M* », ce qui, pris au pied de la lettre, est faux. En effet, si G n'est pas connexe, $\lambda_2=0$ et $\varphi_1+\varphi_2$ est vecteur propre pour L alors qu'il ne l'est pas pour M.

3-b On déduit de ce qui précède que $(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ est aussi une base de vecteurs propres pour $N=L-I_n+\dfrac{\lambda}{D_G}M$, de valeurs propres associées respectivement $-1+\lambda_n,\lambda_2-1,\ldots,\lambda_n-1$. La plus grande valeur propre de N est $\lambda_n-1=\lambda-1$.

D.4

4-a Vu que $\Omega=[\![1,p]\!]$ est un ensemble indépendant de sommets et vu la définition de L, la matrice L est de la forme $\begin{pmatrix}I_p & P\\ {}^tP & Q\end{pmatrix}$. Donc

$$B=I_p-I_p+\frac{\lambda}{D_G}\,D_G\begin{pmatrix}\varphi_1(1)\\ \vdots\\ \varphi_1(p)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1(1) & \ldots & \varphi_1(p)\end{pmatrix}=\frac{\lambda}{D_G}\begin{pmatrix}\sqrt{d_1}\\ \vdots\\ \sqrt{d_p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{d_1} & \ldots & \sqrt{d_p}\end{pmatrix}.$$

On en déduit, d'après 2), que les valeurs propres de B sont 0 de multiplicité $p-1$ et $\frac{\lambda}{D_G} D_\Omega$ de multiplicité 1.

4-b D'après le a), le 1-b) et le 3-b), on a $\lambda - 1 \geq \lambda \frac{D_\Omega}{D_G}$.

D.5

Supposons G r-coloriable par la partition $(\Omega_1, \ldots, \Omega_r)$. Pour chaque $k = 1, \ldots, r$, on peut changer l'ordre des sommets pour que ceux de Ω_k soient les premiers. Ceci bien sûr est sans effet sur les valeurs propres de L. D'après le 4-b), on a donc $\lambda - 1 \geq \lambda \frac{D_{\Omega_k}}{D_G}$ pour tout k. En sommant toutes ces inégalités, on obtient

$$r(\lambda - 1) \geq \lambda \sum_{k=1}^{r} \frac{D_{\Omega_k}}{D_G} = \lambda \,.$$

On peut remarquer que $\lambda = \lambda_n > 1$. En effet, puisque $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$ et que la trace de L est n, on a $n \leq (n-1)\lambda_n$, et donc $\lambda \geq \frac{n}{n-1} > 1$.

Pour tout r tel que G soit r-coloriable, on a donc $r \geq \frac{\lambda}{\lambda - 1} = 1 + \frac{1}{\lambda - 1}$, ce qui veut dire

$$\chi(G) \geq 1 + \frac{1}{\lambda - 1} \,.$$

D.6

On peut bien sûr colorier K_n en n couleurs (une pour chaque sommet). On ne peut pas faire moins puisque chaque sommet est relié à chaque autre sommet, et donc les couleurs des sommets doivent être toutes différentes. Ainsi $\chi(K_n) = n$. Comme on a calculé $\lambda_n(K_n) = \frac{n}{n-1}$ pour K_n en A-2, l'inégalité $\chi(K_n) \geq 1 + \frac{1}{\lambda_n(K_n) - 1} = n$ confirme bien ce qui est clair par ailleurs.

La couleur d'un sommet de C_n doit être différente de celles de ses voisins. Si $n = 2k$ on peut colorier avec deux couleurs, en les alternant : $\chi(C_{2k}) = 2$. Comme on a calculé en A-3 $\lambda_{2k}(C_{2k}) = 2$, ceci est bien confirmé par $\chi(C_{2k}) \geq 1 + \frac{1}{\lambda_{2k}(C_{2k}) - 1} = 2$.

Si $n = 2k+1$, on ne peut pas alterner deux couleurs le long du circuit, mais on peut colorier en utilisant une fois une troisième couleur : $\chi(C_{2k+1}) = 3$. Comme on a vu en A-3 que $\lambda_{2k+1}(C_{2k+1}) < 2$, ceci est bien confirmé par $\chi(C_{2k+1}) \geq 1 + \frac{1}{\lambda_{2k+1}(C_{2k+1}) - 1} > 2$.

Un graphe G est biparti si et seulement si on peut le colorier en deux couleurs. Comme on ne peut pas avoir $\chi(G) = 1$ puisqu'on suppose tous les $d_i, \geq 1$, G est biparti si et seulement si $\chi(G) = 2$. Si $\lambda_n(G) < 2$, on a $\chi(G) \geq 1 + \frac{1}{\lambda_n(G) - 1} > 2$ et donc G n'est pas biparti.