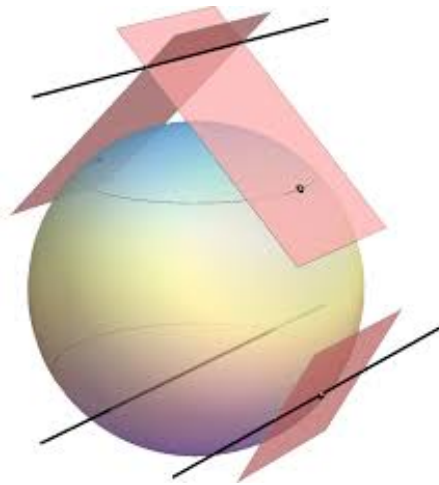


## *Livret de l'agrégatif*

### Ressources générales sur internet

- ★ Site du ministère : <http://www.devenirenseignant.gouv.fr/cid98448/>
- ★ Site du jury du concours : <https://agreg.org/>, avec notamment :
  - le programme du concours
  - les rapports de jury
- ★ Site de la prépa de Rennes : <http://agreg-maths.univ-rennes1.fr/>
- ★ Wiki des étudiants : <https://minerve.ens-rennes.fr/index.php/Accueil>
- ★ Listes de développements classiques :
  - sur le wiki : .../Développements\_par\_thèmes
  - sur les fiches des UE du master : algèbre et analyse



## Abrégé du programme 2020 : algèbre

⚠ Ce qui suit est un extrait et ne remplace en rien la lecture du programme.

### 1 Algèbre linéaire

#### 1.1 Espaces vectoriels

- (a) Espaces vectoriels, applications linéaires.
- (b) Sous-espaces stables d'un endomorphisme.
- (c) Représentations linéaires d'un groupe.

#### 1.2 Espaces vectoriels de dimension finie

- (a) Espaces vectoriels de dimension finie.
- (b) Applications multilinéaires.
- (c) Matrices à coefficients dans un anneau commutatif.
- (d) Sous-espaces stables d'un endomorphisme, lemme des noyaux.

### 2 Groupes

- (a) Groupes, morphismes de groupes.
- (b) Groupes cycliques. Groupes abéliens de type fini.
- (c) Groupe des permutations d'un ensemble fini.
- (d) Groupes classiques d'automorphismes d'un espace vectoriel de dim. finie.
- (e) Représentations d'un groupe fini sur un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

### 3 Anneaux, corps et polynômes

- (a) Anneaux (unitaires), morphisme d'anneaux, sous-anneaux.
- (b) Algèbre des polynômes à une ou plusieurs indéterminées sur un anneau commutatif.
- (c) Corps, sous-corps.
- (d) Divisibilité dans les anneaux commutatifs intègres.
- (e) Congruences dans  $\mathbb{Z}$ . Nombres premiers. Étude de l'anneau  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .
- (f) Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps.

### 4 Formes bilinéaires et quadratiques sur un espace vectoriel

- (a) Formes bilinéaires, alternées, symétriques, formes quadratiques.
- (b) Orthogonalité.
- (c) Espaces vectoriels euclidiens et hermitiens.
- (d) Groupe orthogonal, groupe spécial orthogonal.
- (e) Groupe unitaire, groupe spécial unitaire.

### 5 Géométries affine et euclidienne

- (a) Espace affine et espace vectoriel associé.
- (b) Isométries d'un espace affine euclidien.
- (c) Angles en dimension 2.
- (d) Groupe des isométries laissant stable une partie du plan ou de l'espace.
- (e) Application des formes quadratiques à l'étude des coniques.

## Abrégé du programme 2020 : analyse

⚠ Ce qui suit est un extrait et ne remplace en rien la lecture du programme.

### 6 Analyse à une variable réelle

- 6.1 Nombres réels
- 6.2 Séries numériques
- 6.3 Fonctions définies sur une partie de  $\mathbb{R}$  et à valeurs réelles
- 6.4 Fonctions usuelles
- 6.5 Intégration
- 6.6 Suites et séries de fonctions
- 6.7 Convexité

### 7 Analyse à une variable complexe

- 7.1 Séries entières
- 7.2 Fonctions d'une variable complexe

### 8 Topologie

- 8.1 Topologie et espaces métriques
- 8.2 Espaces vectoriels normés sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$
- 8.3 Espaces de Hilbert

### 9 Calcul différentiel

- 9.1 Fonctions différentiables
- 9.2 Équations différentielles
- 9.3 Géométrie différentielle

### 10 Calcul intégral

- 10.1 Notions de théorie de la mesure
- 10.2 Intégration
- 10.3 Analyse de Fourier

### 11 Probabilités

- 11.1 Définition d'un espace probabilisé
- 11.2 Variables aléatoires, loi d'une variable aléatoire
- 11.3 Convergences de suites de variables aléatoires

### 12 Distributions

- 12.1 Distributions sur  $\mathbb{R}^d$
- 12.2 Espaces  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  et  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$
- 12.3 Applications

### 13 Méthodes numériques

- 13.1 Résolution de systèmes d'équations linéaires
- 13.2 Méth. itératives de rés. approchée d'équations réelles et vect.
- 13.3 Intégration numérique
- 13.4 Approximation de fonctions numériques
- 13.5 Équations différentielles ordinaires
- 13.6 Transformée de Fourier

## Leçons d'algèbre 2019

- 101 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
  - 102 Groupe des nb complexes de module 1. Ss-gr. des racines de l'unité. Appl.
  - 103 Exemples de ss-gr. distingués et de groupes quotients. Applications.
  - 104 Groupes finis. Exemples et applications.
  - 105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.
  - 106 Groupe linéaire d'un e.v. de dim. finie  $E$ , sous-groupes de  $GL(E)$ . Appl.
  - 107 Représentations et caractères d'un groupe fini sur un  $\mathbb{C}$ -e.v. Exemples.
  - 108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.
  - 110 Structure et dualité des groupes abéliens finis. Applications.
- 
- 120 Anneaux  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Applications.
  - 121 Nombres premiers. Applications.
  - 122 Anneaux principaux. Applications.
  - 123 Corps finis. Applications.
  - 125 Extensions de corps. Exemples et applications.
  - 126 Exemples d'équations en arithmétique.
  - 141 Polynômes irréd. à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et appl.
  - 142 PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications
  - 144 Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Ex. et appl.
- 
- 150 Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.
  - 151 Dim. d'un e.v. (on se limitera au cas de la dim. finie). Rang. Ex. et appl.
  - 152 Déterminant. Exemples et applications
  - 153 Poly. d'endom. en dim. finie. Réduction d'un endom. en dim. finie. Appl.
  - 154 Ss-esp. stables par un(e) (famille d')endom. d'un e.v. de dim. finie. Appl.
  - 155 Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.
  - 156 Exponentielle de matrices. Applications.
  - 157 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.
  - 158 Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.
  - 159 Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.
  - 160 Endom. remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dim. finie).
  - 161 Distances et isométries d'un espace affine euclidien.
  - 162 Systèmes d'éq. lin. ; opérations élémentaires, aspects algo. et csq théoriques.
  - 170 Formes quadr. sur un e.v. de dim. finie. Orthogonalité, isotropie. Appl.
  - 171 Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.
- 
- 181 Barycentres dans un espace affine réel de dim. finie, convexité. Appl.
  - 182 Applications des nombres complexes à la géométrie.
  - 183 Utilisation des groupes en géométrie.
  - 190 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

## Leçons d'analyse 2019

- 201 Espaces de fonctions. Exemples et applications.
- 202 Exemples de parties denses et applications.
- 203 Utilisation de la notion de compacité.
- 204 Connexité. Exemples et applications.
- 205 Espaces complets. Exemples et applications.
- 207 Prolongement de fonctions. Exemples et applications.
- 208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.
- 209 Approximation d'une fonction par des poly. et des poly. trigo. Ex. et appl.
- 213 Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.
- 214 Théo. d'inversion loc. et des fonctions impl. Ex. et appl. en ana. et en géom.
- 215 Applications différentiables définies sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Ex. et appl.
- 219 Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et appl.
- 220 Équa. diff.  $X' = f(t, X)$ . Ex. d'étude des solutions en dimension 1 et 2.
- 221 Équa. diff. linéaires. Systèmes d'équa. diff. linéaires. Ex. et appl.
- 222 Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires.
- 223 Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Ex. et appl.
- 224 Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.
- 226 Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence  $u_{n+1} = f(u_n)$ . Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.
- 228 Continuité et dérivabilité des fonct. réelles d'une var. réelle. Ex. et appl.
- 229 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.
- 230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Ex.
- 233 Analyse numérique matricielle : résolution approchée de systèmes linéaires, recherche de vecteurs propres, exemples.
- 234 Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.
- 235 Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.
- 236 Illustrer par des ex. qq méth. de calc. d'intégrales de fn d'une ou plusieurs var.
- 239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Ex. et appl.
- 241 Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.
- 243 Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Ex. et appl.
- 245 Fonctions holomorphes sur un ouvert de  $\mathbb{C}$ . Exemples et applications.
- 246 Séries de Fourier. Exemples et applications.
- 250 Transformation de Fourier. Applications.
- 253 Utilisation de la notion de convexité en analyse.
- 260 Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.
- 261 Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications.
- 262 Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.
- 264 Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.
- 265 Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.

## Quelques livres classiques : algèbre

⚠ Cette sélection est extrêmement partielle et ridiculement petite.

### Ouvrages généraux

RAMIS-DESCHAMPS-ODOUX, *Cours de mathématiques*, Dunod  
SZPIRGLAS, *Algèbre L3*, Pearson  
COMBES, *Algèbre et Géométrie*, Bréal

### Algèbre générale

PERRIN, *Cours d'Algèbre*, Ellipses  
BERHUY, *Algèbre, le grand combat*, Calvage et Mounet  
GOURDON, *Algèbre*, Ellipses

### Algèbre linéaire

GRIFONE, *Algèbre linéaire*, Cépaduès  
MANSUY ET MNEIMÉ, *Algèbre linéaire, réduction des endomorphismes*, Vuibert

### Groupes

DEL COURT, *Théorie des groupes*, Dunod  
CALAIS, *Éléments de théorie des groupes*, PUF  
ULMER, *Théorie des groupes*, Ellipses

### Représentations de groupes

SERRE, *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann  
PEYRÉ, *L'algèbre discrète de la transformée de Fourier*, Ellipses  
RAUCH, *Les groupes finis et leurs représentations*, Ellipses

### Anneaux et corps

CALAIS, *Éléments de théorie des anneaux*, Ellipses  
GOZARD, *Théorie de Galois*, Ellipses  
GOBLOT, *Algèbre commutative*, Dunod

### Arithmétique, théorie des nombres

DUVERNEY, *Théorie des nombres*, Dunod  
HINDRY, *Arithmétique*, Calvage et Mounet

### Algèbre bilinéaire et géométrie

ARNAUDIÈS ET FRAYSSE, tome 4 : algèbre bilinéaire et géométrie, Dunod  
AUDIN, *Géométrie*, EDP Sciences  
GOBLOT, *Thèmes de géométrie*, Masson

## Quelques livres classiques : analyse

⚠ Cette sélection est extrêmement partielle et ridiculement petite.

### Ouvrages généraux

RAMIS-DESCHAMPS-ODOUX, *Cours de mathématiques*, Dunod  
QUEFFÉLEC, ZUILY, *Analyse pour l'agrégation*, Dunod  
RUDIN, *Analyse réelle et complexe*, Dunod

### Analyse fonctionnelle, distributions, EDP

BRÉZIS, *Analyse fonctionnelle : Théorie et applications*, Dunod  
ZUILY, *Éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles*, Dunod  
BONY, *Cours d'analyse : Théorie des distributions et analyse de Fourier*, École Polytechnique

### Analyse complexe, fonctions holomorphes

AMAR ET MATHERON, *Analyse complexe*, Cassini

### Topologie

QUEFFÉLEC, *Topologie*, Dunod

### Calcul différentiel

CHAPERON, *Calcul différentiel et calcul intégral*, Dunod  
ROUVIÈRE, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*, Cassini

### Intégration

BRIANE ET PAGÈS, *Théorie de l'intégration*, Vuibert  
CANDELPERGHER, *Calcul intégral*, Cassini

### Probabilités

BARBÉ ET LEDOUX, *Probabilité*, EDP Sciences  
OUVRARD, *Probabilités*, Tomes 1 et 2, Cassini

### Méthodes numériques

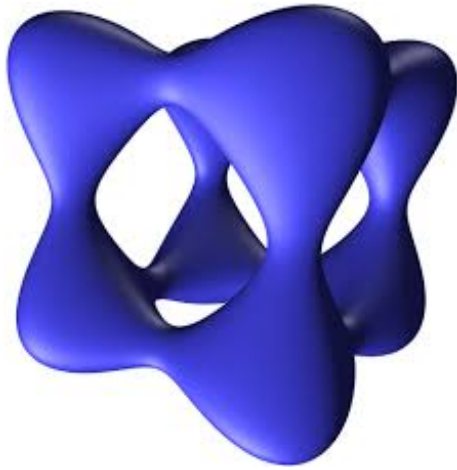
CIARLET, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Dunod  
DEMAILLY, *Analyse numérique et équations différentielles*, EDP Sciences

## Quelques développements classiques : algèbre

- anneau  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , théorème chinois, automorphismes, indicatrice d'Euler
- théorie élémentaire des corps finis
- théorème fondamental des fonctions symétriques
- irréductibilité des polynômes cyclotomiques sur  $\mathbb{Q}$
- groupes diédraux ; produit semi-direct
- groupes d'ordre  $\leq 8$
- groupes d'ordre  $\leq 12$
- théorèmes de Sylow
- décomposition de (Dunford-)Jordan-Chevalley
- générateurs de  $SL(E)$  et simplicité de  $PSL(E)$
- générateurs et simplicité de  $A_5$  et  $A_n$
- exponentielle de matrices ; surjectivité de  $\exp : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$
- réduction des endomorphismes orthogonaux et unitaires
- réduction des endomorphismes symétriques et hermitiens
- algorithme de Gram-Schmidt et décomposition QR (orthogonale  $\times$  triang.)
- algorithme de Gauss et loi d'inertie de Sylvester
- isométries du cube ; isométries du tétraèdre
- sous-groupes finis de  $SO_3(\mathbb{R})$
- générateurs de  $O(E)$ ,  $SO(E)$  et simplicité de  $PSO(E)$
- endomorphismes cycliques et réduction de Frobenius
- endomorphismes semi-simples
- réduction des endomorphismes normaux
- décomposition polaire des matrices
- ellipsoïde de John-Loewner
- classification des coniques euclidiennes affines
- quaternions et  $SO_4(\mathbb{R})$
- homéomorphisme  $\exp : \left\{ \begin{array}{l} \text{matrices} \\ \text{hermitiennes} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{matrices hermitiennes} \\ \text{définies positives} \end{array} \right\}$

## Quelques développements classiques : analyse

- méthode de Newton ; cas des polynômes
- séries entières, fonctions analytiques, exponentielle complexe
- formule de Cauchy pour les fonctions holomorphes
- séries de Fourier
- théorème de Cauchy-Lipschitz
- théorème des extrema liés
- formule d'inversion de Fourier
- théorème d'inversion locale ; théorème des fonctions implicites
- théorème de Hahn-Banach
- inégalités de Hölder, Jensen, Minkowski
- projection sur un convexe fermé dans un Hilbert
- théorème du point fixe de Banach
- théorème d'Ascoli-Arzelà
- théorème de Borel-Cantelli
- théorème de Weierstrass, densité des polynômes orthogonaux (e.g. polynômes de Bernstein)
- prolongement de régularité sous l'intégrale
- fonctions plateau et théorème de Borel
- prolongement méromorphe de la fonction  $\Gamma$
- approximation de l'identité, convolution, régularisation
- sous-variétés
- développement asymptotique d'une intégrale : phase stationnaire et méthode de Laplace
- théorème limite central
- transformée de Fourier et convergence de mesures (théorème de P. Lévy)
- distributions, espace de Schwartz
- théorème de Paley-Wiener
- théorème de Hadamard-Levy



## Ouverture

Pour préparer le concours, il est important de savoir placer chacune des connaissances du programme dans son contexte mathématique et historique ; et de connaître des applications au sein des mathématiques mais aussi dans l'industrie, la physique, la biologie, ainsi que ce qu'on appelle la vraie vie. Lorsque vous aurez réussi le concours, pour l'exercice de votre métier d'enseignant, les mathématiques seront votre matériau de base ; il sera très important d'avoir une culture mathématique large, pour nourrir votre réflexion, vos cours, intéresser vos élèves, répondre aux questions des plus curieux.

Bref, il faut vous ouvrir à des lectures historiques, para-mathématiques, méta-mathématiques, de livres, bandes dessinées, revues, blogs... Vous trouverez ci-dessous une sélection partielle, partielle et incomplète, qu'il faut prendre comme une invitation à vous intéresser à tout ce qui touche les maths.

1. *Cinq minutes de mathématiques*, par E. Behrends, Société Mathématique de France (SMF). Recueil de chroniques mathématiques parues dans le journal *Die Welt*. Récréatif et très facile à lire. Sur le site de la SMF : [ici](#).
2. *Logicomix*, par A. Doxiadis et Ch. Papadimitriou, Vuibert. BD sur la quête des fondements au tournant du vingtième siècle, avec Poincaré, Cantor, Hilbert, Gödel,... C'est génial. Sur le site web de l'éditeur : [ici](#).
3. *Le grand roman des maths*, par Mickaël Launay, Flammarion. Sur le site de l'éditeur : [ici](#).

1. *La mathématique du Chat*, par Philippe Geluck et Daniel Justens, éd. Delagrave / Casterman. Recueil de planches de la BD de Geluck qui montrent comment son célèbre Chat manie les maths. Sur Images des Maths : [ici](#). Sur le site de l'éditeur : [ici](#). Quelques extraits : [ici](#).
2. *Logicomix*, par A. Doxiadis et Ch. Papadimitriou, Vuibert. BD sur la quête des fondements au tournant du vingtième siècle, avec Poincaré, Cantor, Hilbert, Gödel,... C'est génial. Sur le site de l'éditeur : [ici](#).
3. *Les mathématiciens, de l'Antiquité au XXI<sup>e</sup> siècle*, ouvrage collectif, Belin. Sur le site de l'éditeur : [ici](#).
4. *Quadrature*, trimestriel, voir <https://www.quadrature.info>.
5. *Tangente*, magazine bimestriel, <http://tangente-mag.com>.
6. *Images des maths*, site web sur les maths avec des billets de niveaux de difficulté au choix. Adresse du site : <http://images.math.cnrs.fr>.
7. *Le dernier théorème de Fermat*, par S. Singh, Pluriel. Sur le site de l'éditeur : [ici](#). Version documentaire disponible sur internet : [ici](#).
8. *La Symphonie des nombres premiers* et *La symétrie ou les maths au clair de lune*, par M. du Sautoy, éditions Héloïse d'Ormesson. Sur le site de l'éditeur : [ici](#) et [là](#).
9. *Les aventures d'Anselme Lanturlu*, par J.-P. Petit. Série de BD dont *Le Géométricon* et *Le Topologicon*. Téléchargement libre : [ici](#).
10. *Le monde mathématique*, par M. Gardner, éditions Pour la Science.
11. *Les mathématiques*, par I. Stewart, Belin.
12. *Mathématiques, un nouvel âge d'or*, par Keith Devlin, éd. Masson.
13. *Les chroniques de Rose Polymath*, par I. Stewart, Belin. Série de BD. Sur le site de l'éditeur : [ici](#).
14. *Trente livres de mathématiques qui ont changé le monde*, par J.-J. Samuël et J.-C. Boudenot, Ellipses. Sur le site de l'éditeur : [ici](#).
15. *Des mathématiciens de A à Z*, par B. Hauchecorne et D. Suratteau, Ellipses. Sur le site de l'éditeur : [ici](#).

