composition de mathématiques générales

Durée : 6 heures

Avertissement : Les trois premières parties sont indépendantes. On y établit des résultats utilisés dans la quatrième partie.

Notations et définitions.

On désigne respectivement par **N**, **Z**, **Q**, **R**, et **C**, l'ensemble des entiers naturels, l'anneau des entiers relatifs, le corps des nombres rationels, le corps des nombres réels et le corps des nombres complexes.

On désigne par $| z |$ le module du nombre complexe z. Si k et l sont des entiers positifs ou nuls, avec $k \leq l$, on désigne par $\binom{l}{k}$ le coefficient binômial $\frac{l!}{k!(l-k)!}$. Par convention, $0! = 1$.

Soit A un anneau. Si p et q sont des entiers strictement positifs, $M_{p,q}(A)$ désigne l'ensemble des matrices à p lignes et à q colonnes à coefficients dans A. Lorsque $p = q$, on allège la notation en $M_p(A)$.

Soit $B \in M_{p,q}(A)$. On désigne par ${}^tB$ la matrice transposée de B.

Pour $p \geq 1$, on munit $\mathbf{R}^p$ de sa structure euclidienne canonique, et on désigne par $|| \ ||$ la norme euclidienne: si

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

alors $|| x || = (\sum_{i=1}^{p} x_i{}^2)^{\frac{1}{2}}$.

Soit $B \in M_{p,q}(\mathbf{R})$. On munit $\mathbf{R}^p$ et $\mathbf{R}^q$ de leurs bases canoniques; B détermine alors une application linéaire de $\mathbf{R}^p$ vers $\mathbf{R}^q$, et on désigne par $|| B ||$ la norme de cette application linéaire pour la norme euclidienne sur $\mathbf{R}^p$ et $\mathbf{R}^q$. Autrement dit,

$$|| B ||= \max_{||x||=1} || Bx || .$$

Première Partie: Spectre des matrices positives.

Définitions: Soient m et n des entiers strictement positifs.

(1) On dit qu'une matrice rectangulaire $A \in M_{m,n}(\mathbf{C})$ est *positive* (resp. ***strictement positive***) si tous ses coefficients sont des réels positifs ou nuls (resp. strictement positifs). En particulier, pour $n = 1$, on dit qu'un vecteur de $\mathbf{C}^m$ est *positif* (resp. ***strictement positif***) si toutes ses coordonnées sont des réels positifs ou nuls (resp. strictement positifs).

Mise en garde:

On prendra garde à ne pas confondre cette notion avec celle de matrice d'un endomorphisme symétrique réel à valeurs propres positives.

(2) On dit qu'une matrice carrée $A \in M_n(\mathbf{C})$ est *réductible* s'il existe une matrice de permutation (c'est-à-dire une matrice possédant un seul coefficient non nul dans chaque ligne et dans chaque colonne, ce coefficient valant 1) $P \in M_n(\mathbf{C})$ telle que $P.A.P^{-1}$ soit de la forme:

$$\begin{pmatrix} B & O \\ C & D \end{pmatrix}$$

où B et D sont des matrices carrées, et O est la matrice nulle de format correspondant. Autrement dit, A peut être mise sous cette forme en effectuant une permutation sur ses lignes et la même permutation sur ses colonnes.

(3) On dit qu'une matrice carrée est *irréductible* si elle n'est pas réductible.

1. Soit $A \in M_n(\mathbf{C})$ une matrice carrée positive irréductible et soit $y \in \mathbf{C}^n$ un vecteur positif non nul .
   (a) Soit $z = (I + A)y$. Montrer que z est un vecteur positif et que le nombre de coordonnées nulles de z est strictement inférieur au nombre de coordonnées nulles de y.
   (b) Montrer que toutes les coordonnées de $(I + A)^{n-1}y$ sont strictement positives.
   (c) Montrer que la matrice $(I + A)^{n-1}$ est strictement positive.

2. Soit $A \in M_n(\mathbf{C})$ une matrice carrée positive irréductible. On appelle $a_{i,j}$, $1 \leq i,j \leq n$ ses coefficients. Pour

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^n$$

on appelle $(Ax)_1, \ldots, (Ax)_n$ les composantes du vecteur Ax.
   (a) Soit

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

   un vecteur positif non nul . Soit $I \subset \{1, \ldots, n\}$ l'ensemble des indices i tels que $x_i \neq 0$. On pose:

$$r(x) = \min_{i \in I} \frac{(Ax)_i}{x_i}$$

   Montrer que $r(x)$ est le plus grand réel ρ tel que: $\forall i = 1, \ldots, n, \quad \rho x_i \leq (Ax)_i$.
   (b) Montrer que la restriction de la fonction r à l'ensemble Q^+ des vecteurs dont toutes les coordonnées sont strictement positives est continue.
   (c) Soit

$$E = \{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^n \mid \forall i = 1, \ldots, n \quad x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1 \},$$

   (i)Montrer que l'image de E par $(I + A)^{n-1}$ est une partie compacte non vide de Q^+. On note F cette image.
   (ii) Soit $x \in E$ et $y = (I + A)^{n-1}x$. Montrer que $r(x) \leq r(y)$.

(iii) Montrer que la fonction $x \mapsto r(x)$ définie sur E (resp. sur F) y atteint sa borne supérieure et que:

$$\max_{x \in E} r(x) = \max_{y \in F} r(y).$$

(iv)On appelle r la borne supérieure introduite en (iii).
Montrer que r est strictement positif.

On garde la notation introduite dans (c)(iv) dans les questions (d), (e), (f) et (g).

(d) Soit $z \in E$ tel que $r(z) = r$. Montrer que z est un vecteur propre de A, de valeur propre r.

Indication: On pourra considérer le vecteur $t = (I + A)^{n-1}z$ et montrer que si $Az - rz$ n'est pas nul, alors $At - rt$ est un vecteur strictement positif.

(e) Montrer que si $z \in E$ satisfait à $r(z) = r$, alors toutes ses coordonnées sont strictement positives.

(f) Soit α une valeur propre de A, et

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^n$$

un vecteur propre de valeur propre α. Soit

$$y_+ = \begin{pmatrix} | y_1 | \\ \vdots \\ | y_n | \end{pmatrix}.$$

Montrer que le vecteur $Ay_+ - | \alpha | y_+$ est positif, puis que $| \alpha | \leq r$.

(g) Montrer que la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre r est 1.

Indication: On pourra commencer par montrer que pour tout vecteur propre y de valeur propre r, le vecteur y_+ défini comme ci-dessus est encore un vecteur propre de valeur propre r.

3. Soit $A \in M_n(\mathbf{C})$ une matrice carrée positive irréductible. Montrer que A ne peut pas posséder deux vecteurs propres positifs linéairement indépendants.

4. Soient $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbf{C})$ matrice carrée positive irréductible et $B = (b_{i,j}) \in M_n(\mathbf{C})$ telle que:

$$\forall \quad i,j \in \{1, \ldots, n\} \quad | b_{i,j} | \leq a_{i,j}.$$

On appelle r la valeur propre positive de module maximal de A (cf 2.).

(a) Montrer que si γ est une valeur propre de B, alors $| \gamma | \leq r$.

(b) On suppose de plus que B est positive et que $B \neq A$. Montrer que si γ est une valeur propre de B, alors $| \gamma | < r$.

5. Soit $A \in M_n(\mathbf{C})$ une matrice carrée strictement positive (on notera que A est irréductible), et soit r la valeur propre positive de module maximal de A. Montrer que si α est une autre valeur propre de A, on a: $\mid \alpha \mid < r$.

6. Soit $A \in M_n(\mathbf{C})$ une matrice positive telle qu'il existe un entier $p \geq 1$ tel que A^p soit strictement positive.
   (a) Montrer que A est irréductible.
   Soit r sa valeur propre positive de module maximal.
   (b) Montrer que pour tout autre valeur propre α de A on a :$\mid \alpha \mid < r$.

7. On dit qu'une matrice rectangulaire $B \in M_{m,n}(\mathbf{C})$ est *non redondante* si aucune de ses lignes ni aucune de ses colonnes n'est nulle.
Une matrice non redondante $B \in M_{m,n}(\mathbf{C})$ est dite *décomposable* s'il existe des matrices de permutation $P \in M_n(\mathbf{C})$ et $Q \in M_m(\mathbf{C})$ telles que $P.B.Q$ soit de la forme:
$$\begin{pmatrix} B' & O \\ O & B'' \end{pmatrix}$$
où B' et B'' sont des matrices rectangulaires.
Une matrice rectangulaire B est dite *indécomposable* si elle est non redondante et n'est pas décomposable.
   (a) Soit $B \in M_{m,n}(\mathbf{C})$ et posons:
$$C = \begin{pmatrix} O & B \\ {}^tB & O \end{pmatrix} \in M_l(\mathbf{C}), \text{ avec } l = m + n.$$
   Montrer que B est indécomposable si et seulement si C est irréductible.
   (b) Soit $B \in M_{m,n}(\mathbf{R})$ une matrice à coefficients réels positifs où nuls.
   Montrer que si B est indécomposable alors $B{}^tB$ et ${}^tBB$ sont irréductibles et satisfont à la conclusion de 6.(b).

Deuxième Partie: Algèbres de matrices.

Définitions, notations, rappels:

Soit K un corps. On rappelle qu'une *K-algèbre associative avec unité* est un K-espace vectoriel $(A, +, .)$ muni d'une structure d'anneau avec unité $(A, +, \times)$, tel que les lois de groupe abélien $(A, +)$ soient les mêmes pour les deux structures, et que la loi de multiplication $\times$ de la structure d'anneau soit une application K-bilinéaire de $A \times A$ vers A. Soient A et B des algèbres associatives avec unité. Un *morphisme d'algèbres* de A vers B est une application K-linéaire de A vers B qui est de plus un homomorphisme d'anneaux avec unité. Soit A une algèbre associative avec unité; une *sous-algèbre* de A est un sous-espace vectoriel qui est aussi un sous-anneau qui possède le même élément unité que A. Dans la suite du problème, K est $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, et, lorsque le contexte est clair, on parle simplement d'algèbre associative avec unité, ou même d'algèbre associative.

Soit A une algèbre associative, N une partie de A, a et b des éléments de A. On désigne par aNb l'ensemble des éléments de A de la forme anb, où n décrit N.

Soit A une algèbre associative. On dit qu'un élément p de A est un *idempotent* s'il satisfait à: $p^2 = p$. Un *idempotent central* est un idempotent qui appartient au centre de

A, c'est-à-dire qui commute à tout élément de A. Soit n un entier supérieur ou égal à 2; on dit que des idempotents $p_1, \ldots, p_n$ sont orthogonaux s'ils vérifient: pour $i \neq j$, $p_i p_j = p_j p_i = 0$.

Soit M une algèbre de matrices (i.e $M = M_n(K)$, où K est un corps) et S une partie de M. On appelle *commutant* de S dans M, et on le note S' ou $C(S)$, l'ensemble $\{ m \in M \mid ms = sm \quad \forall s \in S\}$.

On désigne par M l'algèbre $M_n(\mathbf{C})$. Pour $1 \leq i,j \leq n$, on désigne par $E_{i,j}$ la matrice dont le seul coefficient non nul est celui situé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne et vaut 1.

1. (a) Soit J un idéal bilatère non nul de M. Montrer que $J = M$.

Indication: si $x \neq 0$ est dans J, on pourra considérer les éléments $E_{l,i}xE_{j,l}$, $1 \leq i,j,l \leq n$.

(b) Quel est le centre de M ?

2. Soit V un espace vectoriel complexe de dimension finie m. On désigne par $End(V)$ l'algèbre des endomorphismes de V. Soit $\rho : M \to End(V)$ un morphisme d'algèbres avec unité.
   (a) Soit, pour $i = 1, \ldots, n$, V_i l'image de $\rho(E_{i,i})$. Montrer que $V = \oplus_{i=1}^n V_i$.
   (b) Montrer que si $k \neq j$, la restriction de $\rho(E_{i,j})$ à V_k est nulle, et que la restriction de $\rho(E_{i,j})$ à V_j définit un isomorphisme de V_j sur V_i.
   (c) On pose $d = \dim(V_1)$, et on fixe une base$(e_1, \ldots, e_d)$ de V_1. Pour tout $k = 1, \ldots, d$, soit W_k le sous-espace vectoriel de V engendré par les éléments:

$$\rho(E_{1,1})e_k, \rho(E_{2,1})e_k, \ldots, \rho(E_{n,1})e_k.$$

(i) Montrer que pour tout $k = 1, \ldots, n$, W_k est un sous-espace vectoriel de dimension n, dont les éléments ci-dessus forment une base.
(ii)Montrer que $\forall x \in M, \rho(x)$ envoie W_k dans W_k. On notera alors $\rho_k(x)$ l'endomorphisme de W_k donné par la restriction de $\rho(x)$ à W_k.
(iii)Montrer que dans la base décrite au (i), la matrice de $\rho_k(x)$ est x.
(iv)Montrer que $V = \oplus_{k=1}^d W_k$.
(v)Montrer que dans la base de V obtenue en écrivant à la suite les unes des autres les bases respectives de $W_1, \ldots, W_d$ évoquées au (i), la matrice de $\rho(x)$ est la matrice diagonale par blocs:

$$\begin{pmatrix} x & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & x & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & x \end{pmatrix}$$

   (d) Soit $\rho : M_n(\mathbf{C}) \to M_m(\mathbf{C})$ un morphisme d'algèbres avec unité. Montrer que ρ est injectif et que m est un multiple de n.

3. On conserve les notations du 2.

(a) Soit A un endomorphisme de V qui commute avec tous les $\rho(x)$, $x \in M$. On considère sa matrice dans la base du 2.(c)(v), que l'on écrit comme une matrice par blocs:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{d1} & \dots & A_{dd} \end{pmatrix}$$

où les A_{ij} sont des matrices carrées dans $M_n(\mathbf{C})$. Montrer que chaque matrice A_{ij} est une matrice scalaire.

(b) Montrer que l'ensemble des endomorphismes de V qui commutent avec tous les $\rho(x)$, $x \in M$,que l'on note $\rho(M)'$, est une sous-algèbre de $End(V)$ isomorphe à l'algèbre des matrices $M_d(\mathbf{C})$, et que l'ensemble des endomorphismes de V qui commutent avec tous les éléments de $\rho(M)'$ est exactement $\rho(M)$.

4. Soient $A_1, A_2, \dots, A_m$ des algèbres de matrices (i.e chaque $A_j = M_{n_j}(\mathbf{C})$ pour un entier $n_j \geq 1$). On rappelle que la formule suivante permet de munir le produit $N = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m$ d'une structure d'algèbre associative avec unité:

$$(a_1, \dots, a_m).(b_1, \dots, b_m) = (a_1 b_1, \dots, a_m b_m).$$ 6.

Pour $j = 1, \dots, m$, on note $i_j : A_j \to N$, $\quad \pi_j : N \to A_j$ les applications données par:

$$i_j(a) = (0, \dots, 0, a, 0, \dots, 0) \quad (a \text{ figure en position } j)$$

$$\pi_j(a_1, \dots, a_m) = a_j.$$

Ce sont des morphismes d'algèbres avec unité, respectivement injectif et surjectif. On identifiera A_j avec son image $i_j(A_j)$ dans N, si bien que $N = \oplus_{j=1}^m A_j$ et que π_j s'identifie à la j-ème projection de cette décomposition en somme directe. On dit que N est une *somme directe d'algèbres de matrices.*

Dans la suite, lorsqu'on considèrera une somme directe d'algèbres de matrices $\oplus_{j=1}^m A_j$, on la considèrera toujours munie de la structure d'algèbre associative avec unité provenant de l'identification de $\oplus_{j=1}^m A_j$ avec $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m$.

On note I_j l'élément unité de A_j, et p_j son image dans N par i_j.

(a) Montrer que $p_1, \dots, p_m$ sont des idempotents deux à deux orthogonaux, de somme égale à l' élément identité de N.

(b) Déterminer le centre de N.

(c) Déterminer les idempotents centraux de N.

(d) On dit qu'un idempotent central p de N est *minimal* si pour tout autre idempotent central q de N tel que $pq \neq 0$, on a : $pq = qp = p$. Déterminer les idempotents centraux minimaux de N.

5. Soit $N = \oplus_{j=1}^m A_j$ comme au 4., et W un espace vectoriel complexe de dimension finie. Soit $\rho : N \to End(W)$ un morphisme d'algèbres avec unité supposé injectif.

(a) Pour tout $j = 1, \dots, m$, on appelle W_j l'image de $\rho(p_j)$. Montrer que $W = \oplus_{j=1}^m W_j$.

(b) Soit y un élément de $\rho(A_j)$. Montrer que, pour $k \neq j$, y agit par 0 dans W_k, et que y envoie W_j dans lui-même.

Ceci permet, pour chaque $j = 1, \dots, m$, de considérer la restriction de ρ à A_j comme un morphisme de A_j dans $End(W_j)$, encore noté ρ.

(c) Montrer que ce morphisme $A_j \to End(W_j)$ est injectif, et qu'il existe une base de W_j telle que, pour tout x dans A_j, la matrice de $\rho(x)$ dans cette base est une matrice diagonale par blocs:

$$\begin{pmatrix} x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & x \end{pmatrix}.$$

On appelle d_j le nombre de blocs.

(d) On note $C(N)$ l'ensemble des endomorphismes de W qui commutent à tous les $\rho(x), x \in N$. Montrer que $C(N) = \oplus_{j=1}^{m} \rho(p_j) C(N) \rho(p_j)$.

(e) Montrer que $C(N)$ est isomorphe à la somme directe d'algèbres de matrices $\oplus_{j=1}^{m} M_{d_j}(\mathbf{C})$.

(f) Montrer que l'ensemble des endomorphismes de W qui commutent à tout élément de $C(N)$ est $\rho(N)$.

6. Soient $A = M_n(\mathbf{C})$, $B = M_m(\mathbf{C})$ et $\rho : A \to B$ un morphisme d'algèbres avec unité; ρ est donc injectif (cf. 2.(d)). Pour tout élément x de A, on note encore x son image $\rho(x)$ dans B.

(a) Soit q un idempotent non nul de A.

(i) Montrer que qAq et qBq sont isomorphes à des algèbres de matrices.

(ii)Soit $C(A)$ le commutant de A dans B. Montrer que le commutant de qAq dans qBq est $qC(A)q$.

(b) Soit q un idempotent non nul de $C(A)$.

(i) Montrer que l'application de A dans qAq envoyant x sur qxq est un isomorphisme d'algèbres avec unité.

(ii)Montrer que le commutant de qAq dans qBq est $qC(A)q$.

Troisième Partie: Normes des matrices à coefficients entiers.

Dans l'anneau $\mathbf{Z}[X_1, \dots, X_n]$ des polynômes à n indéterminées et à coefficients entiers, on désigne par $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ les polynômes symétriques élémentaires, c'est-à-dire:

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \sigma_2 = \sum_{1 \le i < j \le n} X_i X_j, \quad \dots \quad , \sigma_n = X_1 X_2 \dots X_n.$$

On rappelle que si $P \in \mathbf{Z}[X_1, \dots, X_n]$ est un polynôme symétrique à coefficients entiers, alors il existe un polynôme Q à coefficients entiers tel que:

$$P(X_1, \dots, X_n) = Q(\sigma_1, \dots, \sigma_n).$$

Soit n un entier strictement supérieur à 1, et soient $\omega_1, \dots, \omega_l \in \mathbf{C}$ les racines primitives n-ièmes de l'unité. On pose:

$$Q_n(X) = \prod_{i=1}^{l} (X - \omega_i).$$

On rappelle que Q_n est un polynôme à coefficients entiers, qui est irréductible sur $\mathbf{Z}$.

On désigne par U l'ensemble des polynômes à coefficients entiers et de coefficient dominant égal à 1, c'est-à-dire l'ensemble des polynômes de la forme:

$P(X) = X^l - a_1X^{l-1} + \cdots + (-1)^l a_l$, avec $\forall i = 1, \ldots, l \quad a_i \in \mathbf{Z}$.

1. (a) Soit $P \in U$. On suppose que toutes les racines complexes de P sont dans le disque fermé unité centré en 0. On pose $P(X) = X^l - a_1X^{l-1} + \cdots + (-1)^l a_l$. Montrer que:

$$\forall k = 1, \ldots, l \quad |\, a_k \,| \leq \binom{l}{k}.$$

(b) Soit l un entier positif ou nul fixé. Montrer que l'ensemble des polynômes appartenant à U, de degré l et dont toutes les racines complexes sont dans le disque fermé unité centré en 0 est un ensemble fini.

(c) Soit P dans l'ensemble fini décrit au (b). On appelle $\mu_1, \ldots, \mu_l$ ses racines complexes. Pour tout entier positif ou nul k, on définit un polynôme P_k par:

$$P_k(X) = \prod_{i=1}^{l}(X - \mu_i^k).$$

(i) Montrer que $\forall k \in \mathbf{N}, \quad P_k$ est un polynôme à coefficients entiers.
(ii)Montrer qu'il existe deux entiers strictement positifs distincts j et k tels que: $P_j = P_k$.
(iii) En déduire que toutes les racines de P sont des racines de l'unité.

(d) Soit P un élément de U. On suppose que toutes les racines complexes de P sont en fait réelles et contenues dans l'intervalle [-2, 2]. Montrer que ces racines sont de la forme $2cos(2\pi r)$, où r est un rationnel.

Indication: On pourra considérer $Q(X) = X^l P(X + \frac{1}{X})$ (où l est le degré de P), montrer que Q est un élément de U et qu'on peut appliquer (c).

(e) (i) Soit n un entier strictement positif et $\omega \in \mathbf{C}$ une racine primitive n-ième de l'unité. Soit $L \subset \mathbf{C}$ l'extension de $\mathbf{Q}$ engendrée par ω. Soit $\rho \in \mathbf{C}$ une autre racine primitive n-ième de l'unité. Rappeler pourquoi il existe un automorphisme $\mathbf{Q}$-linéaire du corps L qui envoie ω sur ρ .

(ii) Soit P un polynôme à coefficients entiers. On suppose que P possède une racine de la forme $\lambda = 2cos(2\pi \frac{p}{q})$, où p et q sont deux entiers premiers entre eux. Montrer que $2cos(\frac{2\pi}{q})$ est aussi une racine de P.

(iii) Soit P un élément de U, de degré l, et différent de X^l. On suppose que toutes ses racines $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ sont réelles et dans l'intervalle ouvert]-2, 2[. Montrer qu'il existe un entier $q \geq 3$ tel que:

$$\max\{\, |\, \lambda_j \,|, j = 1, \ldots, l\} = 2cos(\frac{\pi}{q}).$$

2. (a) Soient m et n des entiers strictement positifs. On pose $l = m + n$. Soit $B \in M_{m,n}(\mathbf{R})$. On pose:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & B \\ {}^tB & 0 \end{pmatrix} \in M_l(\mathbf{R}).$$

Montrer que:

$$\| B \| = \| {}^tB \| = \| C \| = \| B{}^tB \|^{\frac{1}{2}} = \| {}^tBB \|^{\frac{1}{2}}.$$

(b) Soit $B \in M_{m,n}(\mathbf{Z})$. Montrer que soit $\| B \|$ est de la forme $2cos(\frac{\pi}{q})$, où q est un entier supérieur ou égal à 2, soit $\| B \| \geq 2$.

Quatrième Partie: Indices d'inclusions.

On conserve les notations de la Deuxième Partie.

Définition: Soit $\rho : M_n(\mathbf{C}) \to M_m(\mathbf{C})$ un morphisme d'algèbres avec unité. On rappelle (cf. Deuxième Partie 2.(d)) que ρ est injectif et que m est un multiple de n. On pose: $m = nd$. On appelle *indice de l'inclusion de* $M_n(\mathbf{C})$ *dans* $M_m(\mathbf{C})$, et on le note $[M_m(\mathbf{C}) : M_n(\mathbf{C})]$, l'entier $d^2 = \frac{\dim M_m(\mathbf{C})}{\dim M_n(\mathbf{C})}$.

1. Soient $A = M_n(\mathbf{C}), B = M_m(\mathbf{C}), C = M_f(\mathbf{C})$ des algèbres de matrices et $\rho : A \to B, \tau : B \to C$ des morphismes d'algèbres avec unité. Montrer que le commutant $\tau(B)'$ de $\tau(B)$ dans C est une sous-algèbre du commutant $(\tau \circ \rho(A))'$ de $(\tau \circ \rho(A))$ dans C, et que l'on a: $[(\tau \circ \rho(A))' : \tau(B)'] = [B : A]$.

2. Soient $R = \oplus_{j=1}^{r} A_j$ et $S = \oplus_{i=1}^{s} B_i$ des sommes directes d'algèbres de matrices (cf. Deuxième Partie, 4.), et $\phi : R \to S$ un morphisme injectif d'algèbres avec unité. Ceci permet de considérer R comme une sous-algèbre de S et, pour tout $x \in R$, d'appeller encore x son image $\phi(x)$ dans S.
Pour tout $j = 1, \ldots, r$ soit $q_j \in R$ l'image de l'identité de A_j dans R, et pour $i = 1, \ldots, s$ soit $p_i \in S$ l'image de l'identité de B_i dans S.
   (a) Montrer que $\forall j = 1, \ldots, r$ et $\forall i = 1, \ldots, s$, $p_i q_j$ est un idempotent de B_i.
   (b) Si $p_i q_j \neq 0$, on pose $S_{ij} = p_i q_j S p_i q_j$ et $R_{ij} = p_i q_j R p_i q_j$. Montrer que S_{ij} est isomorphe à une algèbre de matrices et que l'application de A_j vers R_{ij}, qui envoie x sur $p_i x p_i$ est un isomorphisme d'algèbres avec unité.
   (c) On pose, pour $j = 1, \ldots, r$ et $i = 1, \ldots, s$,

$$\lambda_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad p_i q_j = 0, \qquad\qquad \lambda_{ij} = [S_{ij} : R_{ij}]^{\frac{1}{2}} \quad \text{si} \quad p_i q_j \neq 0.$$

On forme alors la matrice à coefficients entiers positifs $\Lambda_R^S = (\lambda_{ij}) \in M_{s,r}(\mathbf{N})$. Cette matrice est appelée *matrice d'indice* pour l'inclusion de R dans S.
Montrer qu'aucune ligne ni aucune colonne de Λ_R^S n'est identiquement nulle.
   (d) On appelle $Z(R)$, (resp.$Z(S)$) le centre de R (resp.de S).
   Montrer que la matrice Λ_R^S est indécomposable (cf. Première Partie, 7.)si et seulement si l'intersection $Z(R) \cap Z(S)$ est réduite aux multiples de l'élément unité.
   (e) Soient R, S, T des sommes directes d'algèbres de matrices telles que R soit une sous-algèbre de S et S une sous-algèbre de T. Montrer que: $\Lambda_R^T = \Lambda_S^T . \Lambda_R^S$.
   (f) Soient R et S des sommes directes d'algèbres de matrices telles que R soit une sous-algèbre de S et on suppose de plus que S est une sous-algèbre d'une algèbre de matrices F. On appelle $C(R)$ et $C(S)$ les commutants respectifs de R et S dans F. Montrer que $C(S)$ est une sous-algèbre de $C(R)$ et que la matrice d'indice pour l'inclusion de $C(S)$ dans $C(R)$ est la transposée de celle de l'inclusion de R dans S.

3. Soit S une somme directe d'algèbres de matrices et $F = End(S)$ l'algèbre des applications $\mathbf{C}$-linéaires de S dans S. Pour tout x dans S, on définit les éléments $\lambda(x)$ et $\rho(x)$ de F par:
$$\forall y \in S,\ \lambda(x)y = xy, \quad \rho(x)y = yx.$$
   (a) Montrer que λ est un morphisme injectif d'algèbres avec unité, que ρ est un antihomomorphisme d'algèbres avec unité (c'est-à-dire que ρ est une application linéaire envoyant l'unité sur l'unité et telle que, pour tous u et v dans S: $\rho(uv) = \rho(v)\rho(u)$) et que:
$$\forall x, z \in S, \quad \lambda(x)\rho(z) = \rho(z)\lambda(x).$$
   (b) Soit R une somme directe d'algèbres de matrices qui est une sous-algèbre de S. On note $End_R(S)$ la sous-algèbre de F formée des applications linéaires f vérifiant:
$$\forall x \in R \quad f \circ \rho(x) = \rho(x) \circ f.$$
   Montrer que $\lambda(S)$ est contenue dans $End_R(S)$, et que $End_R(S)$ est isomorphe à une somme directe d'algèbres de matrices.
   (c) Montrer que la matrice d'indice pour l'inclusion de $\lambda(S)$ dans $End_R(S)$ est la transposée de Λ_R^S.

4. Soient R et S des sommes directes d'algèbres de matrices (cf. Deuxième Partie), R étant une sous-algèbre de S. On pose: $S_1 = S$, $S_2 = End_R(S)$, puis $S_3 = End_{S_1}(S_2)$ et par récurrence $S_{k+2} = End_{S_k}(S_{k+1})$.
On construit donc ainsi une suite croissante d'algèbres avec unité:
$$R = S_0 \subset S = S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset \dots$$
On pose $\Lambda = \Lambda_R^S$. On suppose que $Z(R) \cap Z(S)$ est réduit aux multiples de l'identité.
   (a) Déterminer, en fonction de Λ la matrice de l'inclusion $S_0 \subset S_{2k}$, et celle de l'inclusion $S_0 \subset S_{2k+1}$.
   (b) Montrer que $\Lambda.{}^t\Lambda$ et ${}^t\Lambda.\Lambda$ sont des matrices positives irréductibles et diagonalisables à valeurs propres positives ou nulles.
   (c) Soit $A = \Lambda.{}^t\Lambda$ ou ${}^t\Lambda.\Lambda$. Soit P_0 le projecteur orthogonal sur le sous-espace propre associé à la valeur propre positive maximale de A (cf. Première Partie). Soit $y \in \mathbf{R}^n$ un vecteur non nul à coordonnées positives ou nulles.
   Montrer que $\frac{A^k}{||A||^k} y$ converge, quand k tend vers l'infini, vers $P_0 y$.
   (d) Sous les mêmes hypothèses qu'en (c), montrer que:
$$\lim_{k \to +\infty} || (\Lambda.{}^t\Lambda)^k y ||^{\frac{1}{k}} = \lim_{k \to +\infty} || ({}^t\Lambda.\Lambda)^k y ||^{\frac{1}{k}} = || \Lambda ||^2.$$
   (e) Montrer que:
$$\lim_{k \to +\infty} (\dim S_k)^{\frac{1}{k}} = || \Lambda ||^2.$$
   Quelles sont les valeurs possibles de cette limite?