CENT VINGT-CINQ EXERCICES DE GÉOMÉTRIE POUR LE MASTER DE MATHÉMATIQUES

par

Michèle Audin

La plupart des exercices proposés ici (mais pas tous) se trouvent dans [**2**]. Il existe beaucoup de bons livres de géométrie (voir la bibliographie). On trouvera d'ailleurs d'autres exercices, par exemple dans les livres [**3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 14**] (dans lesquels certains de ceux présentés ici ont été copiés).

0. Classification des coniques affines, propriétés des coniques euclidiennes

Exercices ultra-classiques et élémentaires. Vérifiez que vous savez les faire...

Exercice 1. On se place dans un plan euclidien. Décrire les ensembles définis dans un repère orthonormé par

$$x^2 - 2xy + y^2 + \lambda(x+y) = 0, \quad x^2 + xy + y^2 = 1, \quad xy + \lambda(x+y) + 1 = 0,$$

$$y^2 = \lambda x^2 - 2x, \quad x^2 + xy - 2y + \lambda x + 1 = 0.$$

Exercice 2. On donne une hyperbole. Écrire son équation dans un repère d'origine son centre et d'axes ses asymptotes.

Exercice 3. Dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé d'origine O, peut-on écrire l'équation d'une parabole sachant que

– son sommet est O, son axe l'axe des x et son paramètre 2 ?

– son foyer est $F = (4,3)$, sa directrice $D : y = -1$? On déterminera aussi son sommet et son paramètre.

Exercice 4. On donne un cercle dans un plan de l'espace euclidien de dimension 3. On projette l'espace sur un de ses plans. Quelle est l'image du cercle ?

Exercice 5. Montrer que toute conique propre peut se représenter dans un repère orthonormé par une équation

$$y^2 = 2px + qx^2$$

avec q réel et $p > 0$.

Exercice 6. Montrer que la droite qui joint le centre d'une ellipse au milieu d'une corde MM' passe par le point commun aux tangentes à l'ellipse en M et M'.

Merci de me communiquer commentaires, corrections et suggestions. Il n'existe pas et n'existera pas de « corrigé » de cette « feuille ».

***Exercice 7* (Diamètres conjugués d'une ellipse)**. Dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormé d'origine O, on considère la forme quadratique

$$q(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

(avec $0<b<a$). Si (u,v) est une base orthonormée pour q, on dit que u et v sont des *diamètres conjugués* de l'ellipse $\mathcal{C}$ d'équation $q=1$. On suppose que $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont des diamètres conjugués de $\mathcal{C}$. On appelle P le point d'intersection des tangentes à $\mathcal{C}$ en M et M'. Montrer que

– Le quadrilatère $OMPM'$ est un parallélogramme d'aire (constante) égale à ab (premier théorème d'Apollonius).

– La quantité $OM^2+OM'^2$ est constante, égale à a^2+b^2 (deuxième théorème d'Apollonius).

Exercice 8. On donne deux paraboles dans un plan affine euclidien. Montrer qu'elles sont (directement) semblables.

On donne deux coniques propres $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ dans un plan affine euclidien. À quelle(s) condition(s) sont-elles semblables ?

Exercice 9. On donne une conique propre $\mathcal{C}$ d'un plan affine euclidien. Quel est le groupe des isométries qui préservent $\mathcal{C}$?

Exercice 10. Soit M un point d'une parabole $\mathcal{P}$ de sommet S. La normale[(1)] à $\mathcal{P}$ en M coupe l'axe en N, la tangente le coupe en T. On appelle m le projeté orthogonal de M sur l'axe.

Montrer que mN ne dépend pas de M. Quelle est sa valeur ?

Montrer que S est le milieu de mT. Quel est le milieu de NT ?

Exercice 11. Soit $\mathcal{P}$ une parabole. On considère deux cordes parallèles MN et $M'N'$. Montrer que la droite joignant leurs milieux est parallèle à l'axe de $\mathcal{P}$.

Exercice 12. Écrire l'équation d'une conique de foyer F dans des coordonnées polaires dont l'origine est en F.

Exercice 13. Dans un plan affine euclidien, on donne un point F, une droite D ne passant pas par F et un réel strictement positif e. Décrire l'ensemble

$$\{M \mid MF\leq ed(M,D)\}?$$

Exercice 14. Dans un plan affine euclidien, on donne deux points F et F'. Soit $a=\frac{1}{2}FF'$. Quel est l'ensemble des points M tels que $MF+MF'=2a$? tels que $MF-MF'=2a$?

Exercice 15. Dans un plan affine euclidien, on donne deux points F et F' et un nombre réel positif a. Décrire les ensembles

$$\left\{M \mid MF+MF'\leq 2a\right\},\qquad \left\{M \mid MF'-MF\leq 2a\right\}?$$

Exercice 16. On donne un cercle $\mathcal{C}$ de centre F et un point F' à l'intérieur de ce cercle. Quel est le lieu des centres des cercles tangents à $\mathcal{C}$ et passant par F' ? Même question avec F' extérieur à $\mathcal{C}$.

Exercice 17. Dans un plan affine euclidien, on considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et un de ses diamètres AA'. À tout point M de $\mathcal{C}$ distinct de A et de A', on associe le point M' obtenu de la façon suivante :

– On projette M sur la médiatrice de AA', obtenant un point K,

– M' est le point d'intersection des droites OM et AK (figure 1).

Montrer que M se trouve sur une parabole de foyer O et de directrice la tangente à $\mathcal{C}$ en A. Étudier la réciproque.

(1)La droite perpendiculaire à la tangente et passant par M.

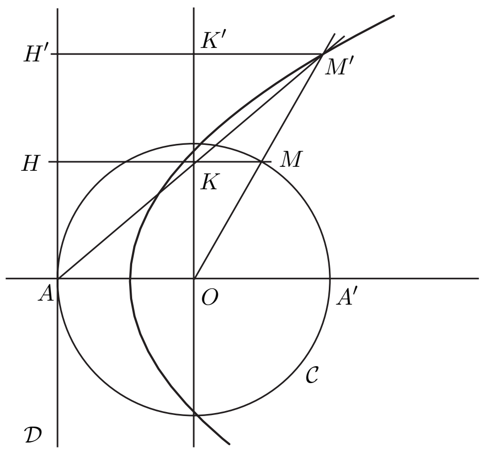

FIGURE 1

***Exercice 18* (Mouvement des planètes)**. Si l'on en croit les lois de Kepler, les planètes décrivent des trajectoires planes décrites en coordonnées polaires (ρ, θ) par une équation $\rho = f(\theta)$, où la fonction f vérifie l'équation différentielle

$$\frac{1}{f} + \frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{f}\right) = \text{ constante}$$

(la constante dépend des masses et de constantes universelles, elle n'est pas nulle). Déterminer la nature de ces trajectoires.

***Exercice 19* (Bissectrices et tangentes)**. Soit $\mathcal{C}$ une conique propre non vide de foyer F et de directrice D. Soient M et N deux points de $\mathcal{C}$. On suppose que la droite MN rencontre D en P. Montrer que la droite PF est une bissectrice de l'angle de droites (FM, FN).

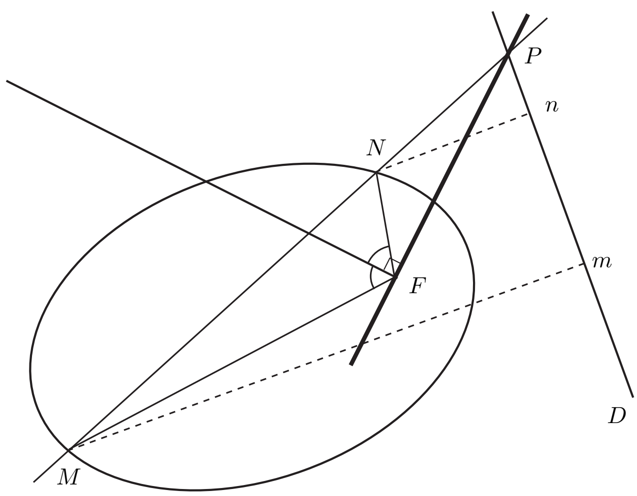

FIGURE 2

En faisant tendre N vers M, montrer que pour tout point M de $\mathcal{C}$, si P est le point d'intersection de la perpendiculaire à MF en F et de la droite D, la droite PM est tangente à $\mathcal{C}$ en M. En déduire que, si P est un point de la directrice D, les points de contact avec $\mathcal{C}$ des tangentes issues de P sont alignés avec F.

Exercice 20. Soit $\mathcal{P}$ une parabole de foyer F et de directrice D. Montrer que la tangente à $\mathcal{P}$ en un de ses points M est la médiatrice du segment Fm joignant F à la projection m de M sur D et que le projeté orthogonal du foyer d'une parabole sur une tangente à cette parabole est aussi sur la tangente au sommet.

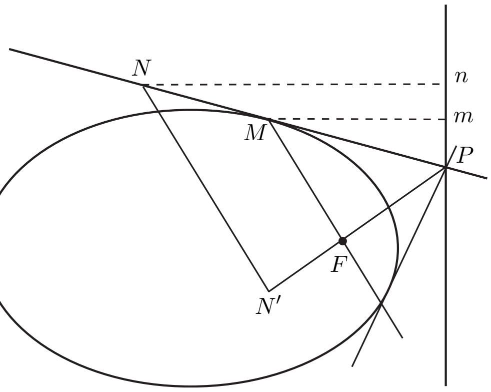

FIGURE 3

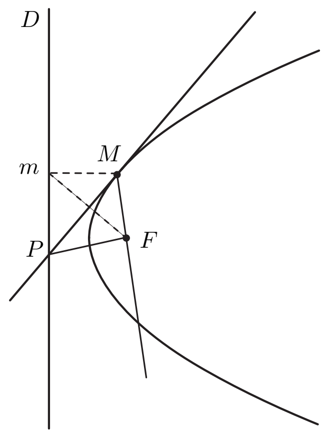

FIGURE 4

Exercice 21. Soit $\mathcal{C}$ une conique propre à centre de foyers F et F'. Montrer que la tangente à $\mathcal{C}$ en M est la bissectrice intérieure (resp. extérieure) de l'angle en M du triangle MFF' si $\mathcal{C}$ est une hyperbole (resp. une ellipse).

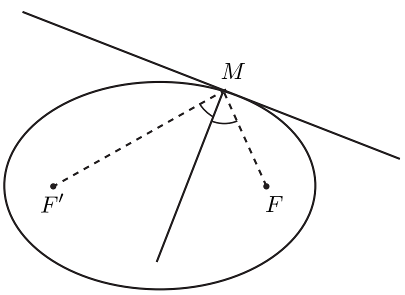

FIGURE 5

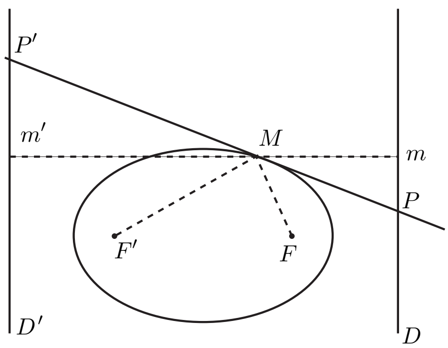

FIGURE 6

Exercice 22. On donne trois droites en position générale (elles ne sont pas concourantes et deux d'entre elles ne sont jamais parallèles) dans un plan affine euclidien. On suppose que $\mathcal{P}$ est une parabole tangente à ces trois droites. Montrer que les trois projections du foyer F de $\mathcal{P}$ sur les trois droites sont alignées sur la tangente au sommet. En déduire que F est sur le cercle circonscrit au triangle déterminé par les trois droites. Que peut-on dire de la tangente au sommet ? de la directrice ? Quel est le lieu des foyers des paraboles tangentes aux trois droites (on traitera avec soin le cas des sommets du triangle) ?

Exercice 23. On donne quatre droites en position générale dans un plan affine euclidien. Montrer qu'il existe une et une seule parabole tangente à ces quatre droites.

***Exercice 24* (Sections coniques)**. Étudier l'intersection d'un plan affine avec le cône de révolution d'équation $x^2 + y^2 = z^2$ (c'est ainsi qu'Apollonius définissait les coniques, et c'est ce qui explique leur nom.). Combien y a-t-il de sphères inscrites dans le cône et tangentes au plan ? Comment s'interprètent les points de contact de ces sphères avec le plan (une histoire belge) ?

Exercice 25. Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites (distinctes) du plan. Deux points M et M' parcourent $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ avec des vitesses proportionnelles (figure 7). Trouver l'enveloppe de la droite MM'. On pourra considérer le centre F de la similitude directe qui envoie chaque point M sur le point M' correspondant et montrer que l'enveloppe est une parabole de foyer F.

***Exercice 26* (Examen juin 2006)**. (1) Donner un exemple d'un triangle d'un plan affine euclidien tel qu'il existe un cercle tangent à chacun de ses trois côtés en leurs milieux.

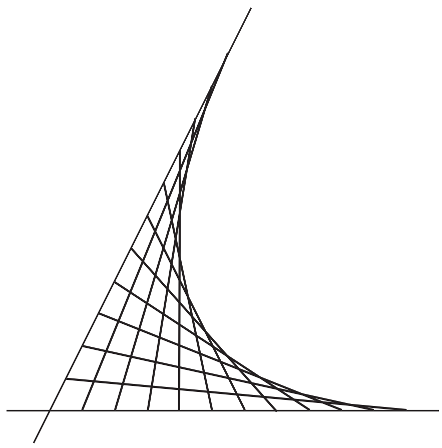

FIGURE 7

(2) Soit un triangle d'un plan affine. Montrer qu'il existe une ellipse tangente à ses côtés en leurs milieux et dont le centre est le centre de gravité du triangle.

1. Formes quadratiques

Ici aussi, exercices ultra-classiques et élémentaires. Vérifiez que vous savez les faire...

Exercice 27. Montrer que $\varphi(x,y) = \dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^n y_i \dfrac{\partial q}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_n)$ et que $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}(d^2q)_0(x,y)$.

Exercice 28. Soit $Q(E)$ l'ensemble des formes quadratiques sur l'espace vectoriel E de dimension n. Montrer que $Q(E)$ est un espace vectoriel de dimension $n(n+1)/2$.

Exercice 29. Soient f et g deux formes linéaires sur un espace vectoriel E de dimension n. Montrer que, pour $n \geq 3$, la forme quadratique $q(x) = f(x)g(x)$ est dégénérée.

Exercice 30. Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E et soit φ une forme bilinéaire symétrique dont la matrice dans cette base est A. Quelle est la matrice de $\widetilde{\varphi} : E \to E^\star$ si on munit $E^\star$ de la base duale de $(e_1,\dots,e_n)$? Montrer que φ est non dégénérée si et seulement si la matrice A est inversible.

***Exercice 31* (Diagonalisation des matrices symétriques réelles)**. Soit A une matrice carrée $n \times n$, symétrique réelle. Montrer qu'il existe une base orthonormée dans laquelle elle est diagonalisable. Pour éviter les ambiguïtés, précisons qu'il s'agit bien ici de diagonaliser A comme la matrice d'un endomorphisme, c'est-à-dire de trouver une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Exercice 32. Les matrices symétriques complexes sont-elles diagonalisables ?

***Exercice 33* (Une autre orthogonalisation simultanée)**. Soient q et q' deux formes quadratiques sur un espace vectoriel E de dimension n. On suppose que q est non-dégénérée et que l'endomorphisme de E composé $\widetilde{\varphi}^{-1} \circ \widetilde{\varphi'}$ a n valeurs propres distinctes. Montrer qu'il existe une base de E orthogonale à la fois pour q et pour q'.

Exercice 34. Montrer que le rang de la forme quadratique q est le rang de l'application linéaire $\widetilde{\varphi}$. Quels sont les rangs des formes quadratiques x_1^2, $x_1^2 - x_2^2$, $x_1^2 + x_2^2$, $2x_1x_2$, $\sum_{i=1}^r \lambda_i x_i^2$?

Exercice 35. Écrire les formes polaires, puis réduire sur $\mathbf{R}$ les formes quadratiques définies sur $\mathbf{R}^4$ par $x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2) + xz + zt + tx$, puis par $xy + yz + zx$.

Exercice 36. On considère le corps $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels. Montrer que sur un espace vectoriel de dimension 1 sur $\mathbf{Q}$, il y a une infinité de formes quadratiques non équivalentes.

***Exercice 37* (Discriminant)**. Soit q une forme quadratique non dégénérée sur un espace de dimension finie sur un corps $\mathbf{K}$. Montrer que le déterminant de la matrice de q dans une base définit un élément $\delta(q) \in \mathbf{K}^\star/(\mathbf{K}^\star)^2$ qui est un invariant du type d'isomorphisme de q.

***Exercice 38* (Sur $\mathbf{F}_q$).** Soit $\mathbf{F}_q$ un corps fini de caractéristique différente de 2. Combien de carrés y a-t-il dans $\mathbf{F}_q$? En déduire que, pour tous a, $b \in \mathbf{F}_q^\star$, il existe deux éléments x, y de $\mathbf{F}_q$ tels que

$$ax^2 + by^2 = 1.$$

Soit maintenant E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbf{F}_q$. Soit Q une forme quadratique non dégénérée sur E. Soit $a \in \mathbf{F}_q^\star$ un élément qui n'est *pas* le carré d'un élément de $\mathbf{F}_q^\star$. Montrer que Q est équivalente, soit à

$$x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + x_n^2$$

soit à

$$x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + ax_n^2$$

(les deux possibilités étant exclusives l'une de l'autre). Étant donnée une forme quadratique, comment décider auquel de ces deux types elle appartient ?

***Exercice 39* (Racine carrée d'une matrice symétrique définie positive).** Soit A une matrice symétrique réelle. On suppose que la forme bilinéaire associée, c'est-à-dire la forme φ définie par

$$\varphi(x, y) = {}^t xAy$$

est définie positive.

(1) Montrer que les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de A sont des nombres réels strictement positifs.
(2) Soit P un polynôme tel que

$$P(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i} \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Montrer que $S = P(A)$ est une matrice symétrique définie positive et qu'elle satisfait à $S^2 = A$.

***Exercice 40* (Décomposition polaire dans $\mathrm{GL}(n; \mathbf{R})$).** Montrer que toute matrice réelle inversible M s'écrit comme un produit

$$M = \Omega S$$

où $\Omega \in \mathrm{O}(n)$ est une matrice orthogonale et S est une matrice symétrique définie positive. Montrer que cette décomposition est unique.

***Exercice 41* (Décomposition « de Cartan »).** Montrer que toute matrice réelle inversible s'écrit comme un produit

$$M = \Omega_1 D \Omega_2$$

où D est une matrice diagonale à valeurs propres strictement positives et Ω_1, Ω_2 sont des matrices orthogonales.

***Exercice 42* (Une application du théorème de Witt).** Dans $\mathbf{R}^3$, on considère la forme quadratique

$$q(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$$

et son groupe d'isométries O_q, c'est-à-dire le groupe

$$\mathrm{O}_q = \{f \in \mathrm{GL}(3; \mathbf{R}) \mid q \circ f = q\}.$$

Déterminer les orbites de son action sur $\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$ (comme sous-groupe de $\mathrm{GL}(3; \mathbf{R})$).

2. Quadriques affines

***Exercice 43*.** Dessiner les quadriques de $\mathbf{R}^3$ d'équation $q(x, y, z) = 1$ (q est une forme quadratique quelconque). Dans le cas où la signature de q est $(2, 1)$, montrer que la quadrique (hyperboloïde à une nappe) est une surface réglée.

***Exercice 44*.** Dessiner la quadrique d'équation $z = xy$ (paraboloïde hyperbolique). Montrer que c'est une surface réglée.

***Exercice 45*.** Dans $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p$, on considère la quadrique Q d'équation

$$\|x\|^2 - \|y\|^2 = 1$$

Montrer que c'est une sous-variété de dimension $n + p - 1$ et qu'elle est homéomorphe (et même difféomorphe) à $S^{n-1} \times \mathbf{R}^p$.

3. Géométrie affine

Exercice 46 **(Le théorème fondamental (ou prétendu tel) de la géométrie affine)**

Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux espaces affines (réels) de même dimension $n \geq 2$. Soit $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ une *bijection*. On suppose que

$$(*) \qquad A, B, C \text{ alignés } \Longrightarrow \varphi(A), \varphi(B), \varphi(C) \text{ alignés}$$

et on veut montrer qu'alors, φ est une application affine(2). On note $A' = \varphi(A)$, *etc.*

(1) Montrer que l'hypothèse « φ est bijective » est nécessaire, puis que l'hypothèse $n \geq 2$ est nécessaire. On pourra dans les deux cas, si l'hypothèse n'est pas vérifiée, chercher une application *non* affine vérifiant $(*)$.

(2) Montrer que

(a) si $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}'$, $\varphi^{-1}(\mathcal{F})$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$;

(b) si les $n+1$ points $A_0, \ldots, A_n$ constituent un repère affine de $\mathcal{E}$, alors leurs images $\varphi(A_0), \ldots, \varphi(A_n)$ sont des points affinement indépendants de $\mathcal{E}'$;

(c) en déduire que si $A_0, \ldots, A_k$ sont des points indépendants de $\mathcal{E}$, alors leurs images $A'_0, \ldots, A'_k$ sont des points indépendants dans $\mathcal{E}'$,

(d) que l'image de toute droite $\mathcal{D}$ est une droite $\mathcal{D}'$ et que l'image de tout plan est un plan,

(e) et que si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont deux droites parallèles, leurs images $\mathcal{D}'_1$ et $\mathcal{D}'_2$ sont deux droites parallèles.

Soit O un point fixé dans $\mathcal{E}$ et O' son image dans $\mathcal{E}'$.

(3) Soient A et B deux points de $\mathcal{E}$ et soit C tel que $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. On suppose que A, B et C ne sont pas alignés. En utilisant 2(e), montrer que $\overrightarrow{O'C'} = \overrightarrow{O'A'} + \overrightarrow{O'B'}$.

(4) Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par O et $\mathcal{D}'$ son image. On fixe $A \in \mathcal{D}$ un point distinct de O et son image A'. Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, on considère le point M tel que $\overrightarrow{OM} = \lambda \overrightarrow{OA}$. Vérifier que son image M' satisfait $\overrightarrow{O'M'} = \mu \overrightarrow{O'A'}$ pour un unique $\mu \in \mathbf{R}$. On a ainsi défini une application

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathcal{D}} : \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ \lambda &\longmapsto \mu. \end{aligned}$$

(a) Soient M et N tels que $\overrightarrow{OM} = \lambda \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{ON} = \lambda' \overrightarrow{OA}$. En utilisant un point B hors de la droite $\mathcal{D}$ et des droites parallèles, construire les points P et Q de $\mathcal{D}$ tels que $\overrightarrow{OP} = (\lambda + \lambda')\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OQ} = \lambda\lambda' \overrightarrow{OA}$.

(b) Montrer que $\sigma_{\mathcal{D}}(\lambda + \lambda') = \sigma_{\mathcal{D}}(\lambda) + \sigma_{\mathcal{D}}(\lambda')$ et que $\sigma_{\mathcal{D}}(\lambda\lambda') = \sigma_{\mathcal{D}}(\lambda)\sigma_{\mathcal{D}}(\lambda')$. En déduire que $\sigma_{\mathcal{D}}$ est un automorphisme du corps $\mathbf{R}$.

(c) Soit σ un automorphisme du corps $\mathbf{R}$. Vérifier que $\sigma(1) = 1$, que $\sigma|_{\mathbf{Q}} = \mathrm{Id}_{\mathbf{Q}}$ et que σ est une application croissante. En déduire que $\sigma = \mathrm{Id}$.

(d) Montrer que φ est une application affine.

(5) Où a-t-on utilisé que φ est bijective ? que $n \geq 2$?

(6) Que se passe-t-il dans le cas complexe ?

4. Géométrie projective

Exercice 47. Soit E un espace vectoriel et soit $\mathcal{H}(E)$ l'espace des hyperplans vectoriels de E. Montrer qu'il existe une bijection naturelle de $\mathcal{H}(E)$ sur l'espace projectif $P(E^\star)$ associé au dual de E.

Exercice 48. À l'aide d'une projection stéréographique, montrer que $\mathbf{P}_1(\mathbf{R})$ est homéomorphe à un cercle.

Exercice 49. Le complémentaire d'une droite dans un plan affine réel a deux composantes connexes. Montrer que le complémentaire d'une droite dans un plan projectif réel est connexe. Qu'en est-il du complémentaire de la droite projective réelle $\mathbf{P}_1(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$?

---

(2) Au delà de l'intérêt de ce théorème, on notera dans sa démonstration la « reconstruction » géométrique des opérations du corps dans la question 4. À ce sujet, il faut conseiller aux lecteurs intéressés la lecture de [**1**].

Exercice 50. Soit E un espace vectoriel et soit $\mathcal{F} \subset E$ un sous-espace *affine* ne contenant pas 0. Montrer que la projection
$$p : E - \{0\} \longrightarrow P(E)$$
se restreint en une injection de $\mathcal{F}$ dans $P(E)$.

Exercice 51. Montrer que $(m_0, \dots, m_{n+1})$ est un repère projectif de l'espace projectif $P(E)$ de dimension n si et seulement si, pour tout i et pour tout k, m_i n'est pas dans le sous-espace projectif engendré par les m_j pour $j \neq i$ et k.

Exercice 52. Soit H un hyperplan vectoriel fixé d'un espace vectoriel E. Soit E_H l'ensemble des droites vectorielles de E qui ne sont pas contenues dans H. Quel est le complémentaire de E_H dans $P(E)$? Soit $\ell \in E_H$ une droite vectorielle fixée. Montrer qu'il existe une bijection
$$E_H \longrightarrow \mathcal{L}(\ell, H)$$
de E_H sur l'espace des applications linéaires de ℓ dans H.

Exercice 53. Démontrer que l'espace projectif complexe est compact et connexe (attention à la séparation !).

Exercice 54. Soit ABC un triangle. Une droite D passant par A coupe la droite BC en P. Montrer que D est une bissectrice de l'angle en A si et seulement si
$$\frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC}.$$

Exercice 55. Dans un plan affine euclidien, soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites sécantes, Δ et Δ' leurs bissectrices. Montrer que $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, Δ et Δ' forment un faisceau harmonique.

Réciproquement, si $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, Δ et Δ' forment un faisceau harmonique et si Δ et Δ' sont perpendiculaires, montrer que Δ et Δ' sont les bissectrices de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

Retrouver le résultat de l'exercice 54.

Exercice 56. Soit $g : P(E) \to P(E)$ une homographie. Montrer que si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ ou si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ et la dimension de $P(E)$ est paire, g a toujours un point fixe. Trouver une homographie $\mathbf{P}_1(\mathbf{R}) \to \mathbf{P}_1(\mathbf{R})$ sans point fixe.

Exercice 57. Soient g et g' deux homographies d'une droite ayant chacune (exactement) deux points fixes (distincts). Montrer que g et g' commutent si et seulement si

– soit elles ont les mêmes points fixes,
– soit elles sont conjuguées, l'une à $z \mapsto -z$ et l'autre à $z \mapsto \beta/z$.

Exercice 58. Quelles sont les homographies de $\mathbf{P}_1(\mathbf{K})$ qui préservent ∞ ? qui préservent 0 et ∞ ? Montrer que le sous-groupe de $\mathrm{PGL}(2, \mathbf{K})$ formé des homographies qui préservent deux points a et b (distincts) est isomorphe au groupe multiplicatif $\mathbf{K}^\star$.

***Exercice 59* (Faisceaux de droites)**. Un *faisceau de droites* d'un plan projectif P est la famille notée $m^\star$ de toutes les droites passant par un point m. Montrer qu'un faisceau de droites de P est... une droite de $P^\star$.

***Exercice 60* (Incidences)**. Soit P un plan projectif. Soient D une droite et m un point de P hors de D. Soit $m^\star \subset P^\star$ la droite duale, c'est-à-dire l'ensemble des droites passant par m (voir l'exercice 59). On définit l'*application d'incidence*
$$i : m^\star \longrightarrow D$$
en associant, à toute droite passant par m, son point d'intersection avec D. Montrer que i est une homographie.

***Exercice 61* (Perspectives)**. Soient H et H' deux hyperplans de l'espace projectif $P(E)$, m un point situé ni sur H ni sur H'. Soit x un point de H. Montrer que la droite mx rencontre H' en un point unique, noté $g(x)$. Montrer que g est une homographie. On appelle g la *perspective* de centre m de H sur H' (ou projection de H sur H').

Montrer que, si D et D' sont deux droites du plan projectif P et si m est un point de P situé ni sur D, ni sur D', la perspective de centre m de D sur D' est composée de deux incidences.

***Exercice 62* (Pappus, encore (la démonstration la plus projective))**. On reprend les notations de l'énoncé du théorème de Pappus. Soient O le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, M celui de BC' et $A'C$, N celui de AC' et $A'B$. Considérer la composition

$$f : BC' \longrightarrow \mathcal{D}' \longrightarrow A'B$$

des perspectives de centre C de BC' sur $\mathcal{D}'$ et de centre A de $\mathcal{D}'$ sur $A'B$. Déterminer $f(B)$, $f(M)$, $f(C')$ et $f(\alpha)$. Considérer ensuite la perspective de centre β

$$g : BC' \longrightarrow A'B.$$

Déterminer $g(B)$, $g(M)$ et $g(C')$. Identifier $g(\alpha)$ et conclure.

5. Birapport

Exercice 63. Quelles sont les homographies de $\mathbf{P}_1(\mathbf{K})$ qui fixent 1 et échangent 0 et ∞ ? En déduire une démonstration sans calcul de l'égalité $[b, a, c, d] = [a, b, c, d]^{-1}$. Montrer de même les égalités $[a, b, d, c] = [a, b, c, d]^{-1}$ et $[a, c, b, d] = 1 - [a, b, c, d]$.

Exercice 64. Soient a, b, m, n et p cinq points distincts d'une droite projective. Montrer l'égalité

$$[a, b, m, n][a, b, n, p][a, b, p, m] = 1.$$

***Exercice 65* (Isométries préservant un tétraèdre)**. Soit G le groupe de toutes les isométries qui préservent un tétraèdre régulier $ABCD$. Montrer qu'une isométrie préservant le tétraèdre $ABCD$ préserve l'ensemble des quatre points $\{A, B, C, D\}$. En déduire qu'il existe un homomorphisme

$$G \longrightarrow \mathfrak{S}_4$$

du groupe G dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$. Trouver une isométrie qui fixe A et B et échange C et D. En déduire que le groupe des isométries qui préservent un tétraèdre régulier est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$.

***Exercice 66* (De $\mathfrak{S}_4$ à $\mathfrak{S}_3$)**. On considère le groupe $\mathfrak{S}_4$ comme le groupe des isométries d'un tétraèdre régulier (exercice 65). Montrer qu'il envoie la perpendiculaire commune à deux arêtes opposées sur la perpendiculaire commune à deux arêtes opposées. En déduire qu'il existe un homomorphisme surjectif

$$\mathfrak{S}_4 \longrightarrow \mathfrak{S}_3.$$

Montrer que son noyau est le sous-groupe V formé de l'identité et des produits de deux transpositions à supports disjoints (voir aussi l'exercice 67). Pensez-vous qu'en général il existe un homomorphisme surjectif de $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathfrak{S}_{n-1}$?

Exercice 67. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$ permute les quatre points alignés a, b, c et d, transformant leur birapport. Montrer que le stabilisateur de $[a, b, c, d]$ est le sous-groupe V formé de l'identité et des produits de deux transpositions à supports disjoints. Combien de valeurs prennent les birapports $[\sigma(a), \sigma(b), \sigma(c), \sigma(d)]$? Montrer que le quotient $\mathfrak{S}_4/V$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$ (voir aussi l'exercice 66).

***Exercice 68* (Involutions)**. On appelle *involution* une homographie g qui n'est pas l'identité et telle que $g^2 = \mathrm{Id}$. Montrer qu'une homographie g d'une droite projective est une involution si et seulement si il existe deux points p et p' (distincts) sur cette droite et tels que $g(p) = p'$ et $g(p') = p$.

On donne deux séries de trois points distincts a_i et a'_i ($1 \leq i \leq 3$) d'une droite projective. Soit f l'unique homographie de cette droite qui envoie a_i sur a'_i. Montrer que f est une involution si et seulement si

$$j = 1, 2, 3 \quad \Longrightarrow \quad [a_1, a_2, a_3, a'_j] = [a'_1, a'_2, a'_3, a_j].$$

Soit g une homographie involutive d'une droite projective réelle dans elle-même. Montrer que si g a un point fixe, alors elle en a exactement deux. On les note a et b. Montrer que, pour tout point m de la droite, on a $[a, b, m, g(m)] = -1$.

Exercice 69. Pour chacune des parties de $\mathbf{C}$ suivantes, décrire son image par les homographies indiquées[3] :

[3] Cet exercice est copié dans [**15**].

– Le premier quadrant ($x > 0$ et $y > 0$) par
$$z \longmapsto \frac{z-i}{z+i}.$$
– Le demi-disque $|z| < 1$, $\mathrm{Im}(z) > 0$ par
$$z \longmapsto \frac{2z-i}{2+iz}.$$
– Le secteur $x > 0$, $y > 0$ et $y < x$ par
$$z \longmapsto \frac{z}{z-1}.$$
– La bande $0 < x < 1$ par
$$z \longmapsto \frac{z-1}{z} \text{ et par } z \longmapsto \frac{z-1}{z-2}.$$

***Exercice 70* (Photographie aérienne).** On considère trois hyperplans H, H_1 et H_2 d'un espace projectif $P(E)$ ainsi que deux points m_1 et m_2. On suppose que m_i n'est ni sur H, ni sur H_i et on appelle g_i la perspective de centre m_i de H sur H_i (voir l'exercice 61). Que peut-on dire de $g_2 \circ g_1^{-1} : H_1 \to H_2$? Imaginons maintenant (en dimension 3) que H soit une partie (supposée plane) de la Terre, m_1 et m_2 les objectifs de deux appareils photographiques situés dans deux avions et H_1 et H_2 les plans des films de ces appareils. En utilisant quatre points de H (arbres, monuments, *etc.*) expliquer comment recoller les deux clichés obtenus(4).

***Exercice 71* (Faisceau de droites (suite)).** Soient d_1, d_2, d_3 et d_4 quatre droites d'un faisceau et soit D une sécante (une droite ne passant pas par m). Soit a_i le point d'intersection de d_i et de D. Montrer que le birapport $[a_1, a_2, a_3, a_4]$ ne dépend pas de la sécante D choisie. On l'appelle birapport des quatre droites et on le note $[d_1, d_2, d_3, d_4]$.

***Exercice 72* (Birapport et dualité).** On reprend les notations de l'exercice 71. Montrer que le birapport $[a_1, a_2, a_3, a_4]$ est en fait celui des quatre points d_1, d_2, d_3 et d_4 sur la droite projective $m^\star$.

***Exercice 73* (Faisceau harmonique).** On dit que quatre droites concourantes d_1, d_2, d_3 et d_4 d'un plan affine $\mathcal{P}$ forment un *faisceau harmonique* si leur birapport vaut -1. Montrer que, pour que les quatre droites concourantes d_1, d_2, d_3 et d_4 forment un faisceau harmonique, il faut et il suffit qu'une parallèle à d_4 rencontre d_1, d_2 et d_3 en des points a_1, a_2, a_3 tels que a_3 soit le milieu de a_1a_2 (figure 9).

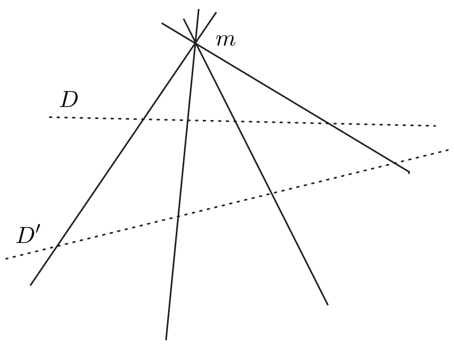

FIGURE 8. Birapport de quatre droites

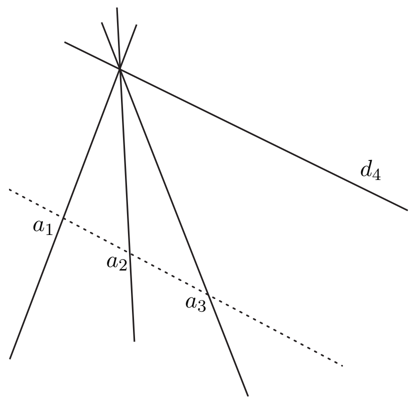

FIGURE 9. Faisceau harmonique

***Exercice 74*.** Sur une droite affine réelle, montrer que si quatre points alignés A, B, C, D forment une division harmonique, un et un seul des points C et D se trouve à l'intérieur du segment $[AB]$.

(4)Voir par exemple une application « pratique » dans [**3**].

Exercice 75. Dans un plan affine, soient A', B' et C' trois points des côtés BC, CA et AB d'un triangle. La droite $B'C'$ coupe BC en D. Montrer qu'on a l'égalité

$$\frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} \cdot \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} \cdot \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}} = [C, B, A', D].$$

Montrer que le produit

$$\frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} \cdot \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} \cdot \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}}$$

est invariant par homographie.

***Exercice 76* (Thalès, le retour)**. Quatre droites d, d', d'' et d_0 passent par un point m, deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ rencontrent d_0 en m_1, m_2. Soient $A_i = \mathcal{D}_i \cap d$, $A'_i = \mathcal{D}_i \cap d'$, $A''_i = \mathcal{D}_i \cap d''$. Que dit dans un plan affine l'égalité des birapports

$$[A_1, A'_1, A''_1, m_1] = [A_2, A'_2, A''_2, m_2]$$

(démontrée dans l'exercice 71) quand d_0 est la droite à l'infini ?

On sait que le théorème de Thalès est une traduction du fait que les projections sont des applications affines. Quelle propriété avez-vous utilisée ici ?

Exercice 77. Deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ se coupent en A. On se donne trois points B, C et D sur $\mathcal{D}$, trois points B', C' et D' sur $\mathcal{D}'$. Montrer que les droites BB', CC' et DD' sont concourantes si et seulement si $[A, B, C, D] = [A, B', C', D']$.

Exercice 78. Dans un plan affine euclidien, soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles de centres O et O'. La droite OO' rencontre $\mathcal{C}$ en A et B, $\mathcal{C}'$ en M et N. Montrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont orthogonaux si et seulement si $[A, B, M, N] = -1$.

Exercice 79. Dans un plan projectif, on considère deux droites D et D' se coupant en un point O et un point A en dehors de $D \cup D'$. Considérer la figure 10 et construire l'unique droite d telle que (D, D', d, OA) soit un faisceau harmonique.

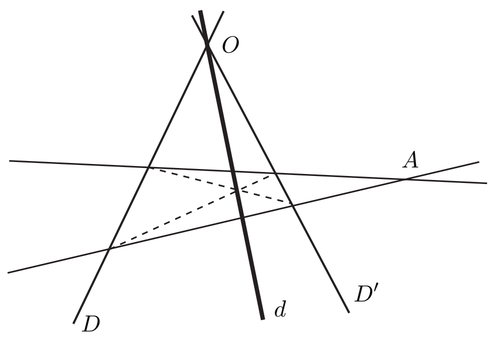

FIGURE 10

Exercice 80. Soit (a, b, c, d) un repère d'un plan projectif. On appelle α l'intersection de ab et cd, β celle de ad et bc, γ celle de ac et bd et enfin δ celle de ac et $\alpha\beta$. Ainsi, les quatre points a, c, γ et δ sont alignés. Montrer que $[a, c, \gamma, \delta] = -1$.

***Exercice 81* (Perspective (suite))**. Soient $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 3, $\mathcal{F}$ un plan de $\mathcal{E}$ et Ω un point hors de $\mathcal{F}$. On projette l'espace $\mathcal{E}$ (privé du plan parallèle à $\mathcal{F}$ passant par Ω) sur $\mathcal{F}$ en associant à $m \in \mathcal{E}$ l'intersection de la droite Ωm avec $\mathcal{F}$. Soit $\mathcal{P}$ un plan de $\mathcal{E}$ ne passant pas par Ω. La projection définit-elle une application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{F}$? Quels sont les points de $\mathcal{F}$ qui ne sont image d'aucun point de $\mathcal{P}$?

On complète $\mathcal{E}$ en un espace projectif. Montrer que la projection définit une perspective π du complété de $\mathcal{P}$ sur le complété de $\mathcal{F}$. Quelle est l'image de la droite à l'infini de $\mathcal{P}$?

Dans cet exercice, Ω peut désigner un œil ou l'objectif d'un appareil photographique, $\mathcal{F}$ la cornée ou le film, $\mathcal{P}$ est un plan de l'espace dont on contemple l'image. Si F est une figure dans $\mathcal{P}$, $\pi(F)$ est la figure « vue en perspective ». Par exemple, on peut considérer une partie de la figure 10 comme un parallélogramme et ses diagonales vus en perspective (c'est clair ?). Dessiner un échiquier (figure 11) en perspective.

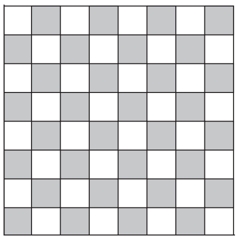

Figure 11

La figure 12 reproduit, avec l'autorisation de François Rouvière, son auteur, qui est aussi celui de [**12**], une photographie prise pendant l'hiver 1981 sur le plateau de Valensole (Alpes de Haute-Provence). Les pieds de lavande sont disposés aux sommets d'un réseau (comme les coins des cases de l'échiquier) dans le plan horizontal (enneigé). Dans le langage de cet exercice, que représente la ligne d'horizon ? Observer les nombreuses droites parallèles qui se coupent à l'infini. Étant donnés trois pieds de lavande consécutifs de la même rangée, où est le « quatrième harmonique » ?

Figure 12

Exercice 82. Quel est l'énoncé dual de celui du théorème de Pappus ?

6. Groupe projectif

Exercice 83. Dans cet exercice, on considère le corps $\mathbf{F}_q$ à q éléments. Combien le groupe $\mathrm{GL}(2;\mathbf{F}_q)$ a-t-il d'éléments ? Et le groupe $\mathrm{PGL}(2;\mathbf{F}_q)$? Et la droite projective $\mathbf{P}_1(\mathbf{F}_q)$?

Montrer qu'il existe un homomorphisme de groupes

$$h : \mathrm{PGL}(2;\mathbf{F}_q) \longrightarrow \mathfrak{S}_{q+1}.$$

Montrer que h est un isomorphisme quand $q = 2$ ou 3. Pensez-vous que ce soit le cas en général ?

On considère le sous-groupe $\mathrm{PSL}(2;\mathbf{F}_3) \subset \mathrm{PGL}(2;\mathbf{F}_3)$ (quotient de $\mathrm{SL}(2;\mathbf{F}_3)$ par son centre). Combien a-t-il d'éléments ? Montrer que h induit un isomorphisme de $\mathrm{PSL}(2;\mathbf{F}_3)$ sur un sous-groupe de $\mathfrak{S}_4$ que l'on déterminera.

Exercice 84. Montrer que $\mathrm{GL}(2;\mathbf{F}_2)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$.

Exercice 85. Montrer que $\mathrm{SL}(2;\mathbf{F}_4)$ est isomorphe à $\mathfrak{A}_5$.

7. Applications à la géométrie euclidienne

Exercice 86 **(Deuxième théorème de Desargues)**. On donne un triangle ABC, une droite d ne passant pas par ses sommets et trois points distincts P, Q et R de d. Soient P', Q' et R' les points d'intersection de d avec les droites BC, CA et AB. Montrer que les droites AP, BQ et CR sont concourantes si et seulement si il existe une involution de d qui envoie P sur P', Q sur Q' et R sur R'.

Exercice 87 **(Orthogonalité en géométrie projective)**. Le plan affine réel est supposé euclidien. On le complète en un plan projectif. Montrer que la relation d'orthogonalité des directions de droites définit une homographie involutive de la droite à l'infini.

Exercice 88 **(L'orthocentre, démonstration projective)**. Soit ABC un triangle d'un plan affine euclidien. En utilisant le deuxième théorème de Desargues (exercice 86) et l'involution définie sur la droite à l'infini par l'orthogonalité (exercice 87), montrer que ses trois hauteurs sont concourantes.

Exercice 89 **(Théorème de Miquel)**. On se donne quatre cercles $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ tels que $\mathcal{C}_4$ et $\mathcal{C}_1$ se coupent en A et A', $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ se coupent en B et B', $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ se coupent en C et C' et enfin $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ se coupent en D et D'. Montrer que A, B, C et D sont cocycliques si et seulement si A', B', C' et D' le sont (figure 13[5]).

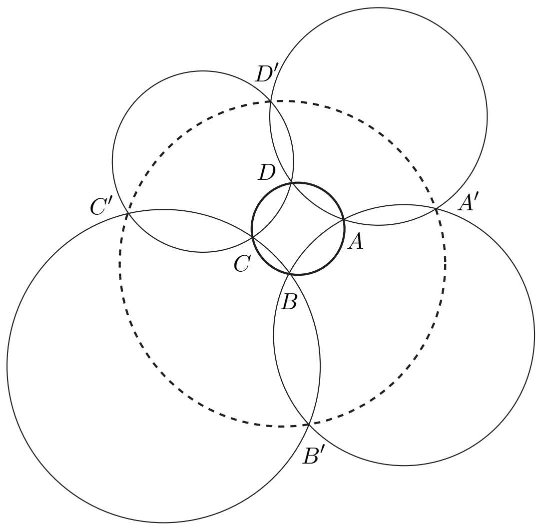

FIGURE 13. Théorème de Miquel

Exercice 90 **(La droite de Simson)**. Soit ABC un triangle. À tout point M du plan, on peut associer ses projetés orthogonaux P, Q et R sur BC, CA, AB. Montrer que P, Q et R sont alignés si et seulement si M est sur le cercle circonscrit à ABC. À tout point M du cercle circonscrit est ainsi associée une droite, sa *droite de Simson* (figure 14).

Exercice 91 **(La droite de Steiner)**. Démontrer que les symétriques P', Q' et R' d'un point M par rapport aux trois côtés BC, CA et AB d'un triangle ABC sont alignés si et seulement si M est sur le cercle circonscrit. Montrer que, si c'est le cas, la droite $P'Q'R'$ (*droite de Steiner* de M) est parallèle à la droite de Simson de M et passe par l'orthocentre de ABC.

Exercice 92 **(Le pivot)**. Soit ABC un triangle et soient A', B' et C' trois points (distincts de A, B et C) situés sur ses côtés BC, CA et AB. Montrer que les cercles circonscrits à $AB'C'$, $BC'A'$ et $CA'B'$ ont un point commun, le *pivot* (voir la figure 15).

---

[5] Si cette figure vous fait penser à un cube, n'hésitez pas à aller chercher pourquoi dans l'exercice 93.

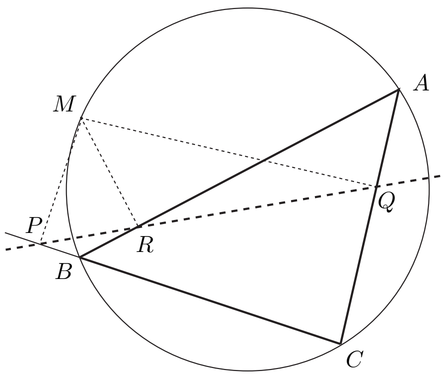

FIGURE 14. Droite de Simson

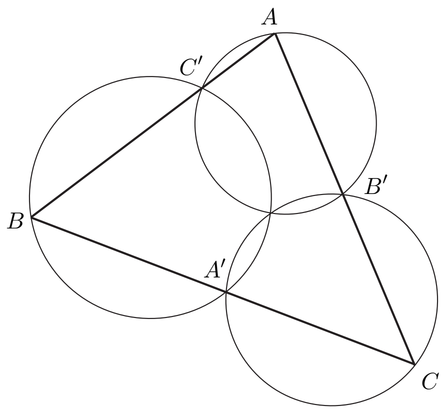

FIGURE 15. Pivot

***Exercice 93* (Le théorème des six birapports et ses applications)**. Soient A, B, C, D, A', B', C' et D' huit points distincts d'une droite projective. Montrer l'égalité

$$[A,B,C',D'][B,C,A',D'][C,A,B',D'][A',B',C,D][B',C',A,D][C',A',B,D]=1.$$

Systèmes cubiques. Appelons *système cubique* la donnée d'un ensemble $\mathcal{X}$ à huit éléments et de trois parties à quatre éléments $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de $\mathcal{X}$ telles que

– les parties $\mathcal{A}\cap\mathcal{B}$, $\mathcal{B}\cap\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}\cap\mathcal{A}$ sont distinctes et ont chacune deux éléments,
– l'intersection $\mathcal{A}\cap\mathcal{B}\cap\mathcal{C}$ contient un unique élément.

Les six parties $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{X}-\mathcal{A}$, $\mathcal{X}-\mathcal{B}$, $\mathcal{X}-\mathcal{C}$ sont appelées *faces* du système.

Montrer que, si $\mathcal{X}$ est l'ensemble des sommets d'un cube et si $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont (les ensembles de sommets de) trois faces passant par un même sommet, $(\mathcal{X},\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C})$ est un système cubique. Montrer que l'on peut nommer les éléments de $\mathcal{X}$

$$\mathcal{X}=\left\{a,b,c,d,a',b',c',d'\right\}$$

de telle façon que l'on ait

$$\mathcal{A}=\left\{b,c,a',d'\right\},\quad \mathcal{B}=\left\{c,a,b',d'\right\},\quad \mathcal{C}=\left\{a,b,c',d'\right\}.$$

Réciproquement, montrer que tout système cubique est en bijection avec un système cubique de cette forme (d'où la terminologie).

Soit $(\mathcal{X},\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C})$ un système cubique de points de $\widehat{\mathbf{C}}=\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$. Montrer que si cinq des faces de $\mathcal{X}$ sont formées de points cocycliques ou alignés, il en est de même de la sixième.

Applications. Retrouver les résultats des exercices 89 (le théorème de Miquel), 90 (la droite de Simson) et 92 (le pivot)[6].

[6] Le texte de cet exercice est dû à Daniel Perrin.

8. Coniques et quadriques projectives

Exercice 94. Les quadriques projectives d'un espace projectif forment un espace projectif. Les quadriques affines d'un espace affine forment-elles un espace affine ? projectif ?

Exercice 95. Soit ABC un triangle dont les trois côtés BC, CA et AB sont tangents à une conique non dégénérée en trois points (respectivement) U, V et W. Montrer que AU, BV et CW sont concourantes et que, si $A' = VW \cap BC$, $B' = WU \cap CA$ et $C' = UV \cap AB$, alors A', B' et C' sont alignés.

Exercice 96. Soit D une droite d'un espace affine, qui rencontre une quadrique en un point (unique et) simple. Montrer que, dans la complétion projective, elle rencontre la quadrique aussi à l'infini. Dans un plan affine, vérifier que ces sécantes sont les parallèles aux asymptotes si la conique est une hyperbole et les parallèles à l'axe si c'est une parabole.

Exercice 97. Montrer que l'intersection d'une quadrique affine $\mathcal{C}$ avec l'hyperplan à l'infini est une quadrique dont la partie quadratique d'une équation de $\mathcal{C}$ est une équation. Réinterpréter l'équation des asymptotes d'une hyperbole.

***Exercice 98* (Nullstellensatz).** On suppose que $\mathbf{K} = \mathbf{C}$. Montrer que l'application qui, à une quadrique projective associe son image, est injective(7) (de $PQ(E)$ dans l'ensemble des parties de $P(E)$). On pourra traiter d'abord le cas où $P(E)$ est une droite et utiliser l'intersection de la quadrique avec les droites dans le cas général. Que se passe-t-il quand $\mathbf{K} = \mathbf{R}$?

Exercice 99. Montrer qu'une quadrique propre et non vide d'un espace projectif réel de dimension 3 est homéomorphe à une sphère S^2 de dimension 2 ou au produit cartésien $\mathbf{U} \times \mathbf{U}$ de deux cercles.

***Exercice 100* (Droites contenues dans une quadrique).** Soit $\mathcal{C}$ une quadrique propre d'un espace projectif complexe de dimension 3. Montrer que la quadrique $\mathcal{C}$ est la réunion d'une famille de droites (et même de deux). Que peut-on dire des quadriques réelles ? Montrer que $\mathcal{C}$ est homéomorphe à $\mathbf{P}_1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$. Montrer que toute quadrique complexe (affine ou projective) contient des droites (affines ou projectives !).

Exercice 101. On donne trois droites de l'espace de dimension 3. Montrer qu'il existe une quadrique qui les contient.

9. Faisceaux de coniques

***Exercice 102* (Faisceaux de coniques).** On considère les faisceaux de coniques définis par les sept paires de coniques de la figure 16. Parmi ces dessins, deux paires définissent (respectivement) le même faisceau. Lesquelles ? Pour chacun des cinq faisceaux différents restants, dessiner (au moins une) conique propre et *toutes* les coniques dégénérées (voir aussi les exercices 108, 109 et 105).

***Exercice 103* (Équations du quatrième degré).** On veut montrer et expliquer que résoudre l'équation du quatrième degré

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

revient à résoudre une équation de degré 3 et quelques équations de degré 2, ce qui permet de résoudre les équations de degré 4 par radicaux si on sait le faire pour celles de degré 3 (du point de vue de la théorie de Galois, la chose importante est l'homomorphisme surjectif $\mathfrak{S}_4 \to \mathfrak{S}_3$, dont le noyau est isomorphe à $\mathbf{Z}/2 \times \mathbf{Z}/2$ et que nous avons mis en évidence dans les exercices 66 et 67). Poser $y = x^2$ et constater que les solutions de l'équation sont les abscisses des points d'intersection de deux coniques planes. Penser au faisceau engendré par ces deux coniques et conclure.

***Exercice 104* (Théorème de Lamé).** Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de coniques et soit A un point du plan. Montrer que les polaires de A par rapport aux coniques de $\mathcal{F}$ sont concourantes.

(7) C'est un cas particulier d'un théorème de Hilbert, le *théorème des zéros*, en allemand *Nullstellensatz*, qui affirme une propriété analogue pour des équations plus générales. Voir par exemple [**11**].

Exercice 105. Dessiner (au moins un) faisceau de coniques *réelles* qui n'apparaît pas dans la liste dressée sur la figure 16 et dans l'exercice 102. Au fait... retrouver la classification des faisceaux de cercles.

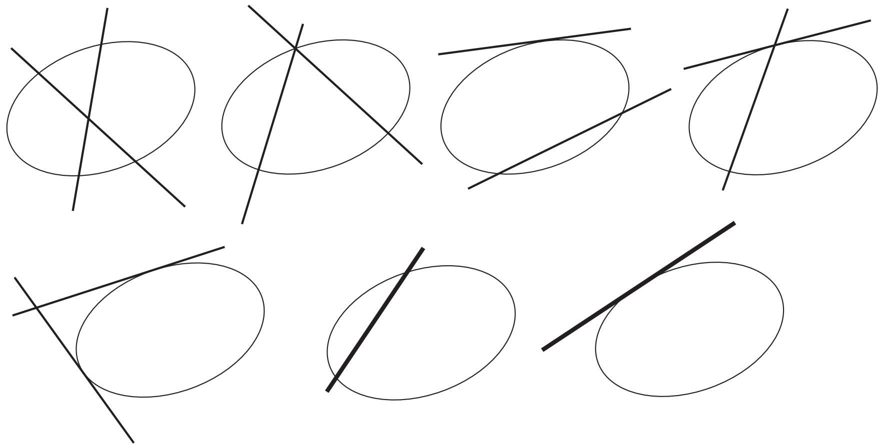

FIGURE 16

Exercice 106. Soient $\mathcal{C}$ un cercle et soit MN une corde de ce cercle. On joint deux points A et B d'un des arcs de cercle MN au milieu de MN, obtenant ainsi deux droites AA' et BB' (B et B' sont des points du cercle). Les droites AB' et $A'B$ coupent la corde MN en deux points dont on demande de montrer que le milieu est le même que celui de MN.

***Exercice 107* (Faisceaux de cercles, examen, juin 2006)**. Dans cet exercice, les questions impaires sont indépendantes des paires, autrement dit, on peut répondre aux questions 1, 3, 5 et 7 sans avoir résolu les autres.

On se place dans un plan affine euclidien $\mathcal{E}$.

(1) Faisceau de cercles. On donne deux cercles non concentriques $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{E}$. On choisit un repère orthonormé de $\mathcal{E}$ dans lequel des équations de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ soient respectivement

$$(x-a)^2 + y^2 - R^2 = 0 \text{ et } (x-a')^2 + y^2 - R'^2 = 0$$

et on considère, pour tout couple (λ, λ') de réels non tous deux nuls, la courbe $\mathcal{C}_{\lambda,\lambda'}$ d'équation

$$\lambda\left\{(x-a)^2 + y^2 - R^2\right\} + \lambda'\left\{(x-a')^2 + y^2 - R'^2\right\} = 0.$$

Déterminer la nature de $\mathcal{C}_{\lambda,\lambda'}$ selon les valeurs de λ et λ'. Dessiner, sur la même figure, les courbes $\mathcal{C}_{\lambda,\lambda'}$ pour $\lambda = 0$, $\lambda' = 0$, $\lambda + \lambda' = 0$. On pourra faire plusieurs figures selon que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont sécants, tangents ou ne s'intersectent pas.

La famille $\mathcal{F}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ de ces courbes est appelée le faisceau de cercles engendré par $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. Les différents cas possibles sont dits types de faisceaux.

Quel est l'ensemble des points du plan ayant même puissance par rapport à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$? Par rapport à deux cercles quelconques de $\mathcal{F}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$?

(2) Espace des cercles. Appelons $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ l'espace défini ainsi : on considère les courbes dont une équation est de la forme

$$f(M) = \alpha\left\|\overrightarrow{OM}\right\|^2 + 2\overrightarrow{OM}\cdot u + c$$

pour $(\alpha, c) \in \mathbf{R}^2$, et u un vecteur du plan vectoriel E dirigeant $\mathcal{E}$. L'espace $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ est l'espace projectif réel de dimension 3 déduit de l'espace vectoriel réel

$$E \times \mathbf{R}^2 = \{(u, \alpha, c)\}.$$

Montrer que (u, α, c) définit l'équation d'un cercle si et seulement si

$$\alpha \neq 0 \text{ et } \|u\|^2 - \alpha c > 0.$$

À quoi correspondent les parties définies par $\alpha \neq 0$ et $\|u\|^2 - \alpha c = 0$? Celles définies par $\alpha = 0$ et $u \neq 0$?

L'équation $\|u\|^2 - \alpha c = 0$ est dite quadrique fondamentale de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$.

Montrer qu'un faisceau de cercles est une droite de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$. Préciser l'intersection d'une telle droite avec la quadrique fondamentale suivant les différents cas de figure obtenus ci-dessus.

(3) Faisceau orthogonal d'un faisceau. On appelle $\mathcal{F}^\perp = \mathcal{F}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')^\perp$ la famille des cercles orthogonaux à $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$. Montrer que, si Γ et Γ' sont deux cercles distincts dans $\mathcal{F}^\perp$, alors $\mathcal{F}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')^\perp = \mathcal{F}(\Gamma, \Gamma')$.

Comparer le type de $\mathcal{F}$ et celui de $\mathcal{F}^\perp$.

(4) Orthogonalité dans l'espace des cercles. Décrire, en termes de la quadrique fondamentale, le faisceau orthogonal $\mathcal{F}^\perp$ d'un faisceau $\mathcal{F}$ dans l'espace $\mathcal{C}(\mathcal{E})$.

(5) Image d'un faisceau par une inversion. On suppose que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ se coupent en deux points distincts A et B. Quelles sont les images de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^\perp$ par une inversion de pôle B ?

On donne deux cercles Γ et Γ' qui ne se coupent pas. Montrer qu'il existe une inversion qui les transforme en deux cercles concentriques.

(6) Inversion dans l'espace des cercles. Un cercle étant fixé, décrire dans l'espace $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ l'inversion de pôle son centre et de cercle invariant ce cercle.

(7) Alternative de Steiner. On donne deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, le second intérieur au premier. Soit Γ_1 un cercle tangent intérieurement à $\mathcal{C}$ et tangent extérieurement à $\mathcal{C}'$. À partir de Γ_1, on construit par récurrence une suite de cercles Γ_i de sorte que Γ_{i+1} soit tangent extérieurement à $\mathcal{C}'$ et à Γ_i, tangent extérieurement à $\mathcal{C}$ et distinct de Γ_{i-1}. Montrer que, si pour un certain n et pour un certain Γ_1, on a

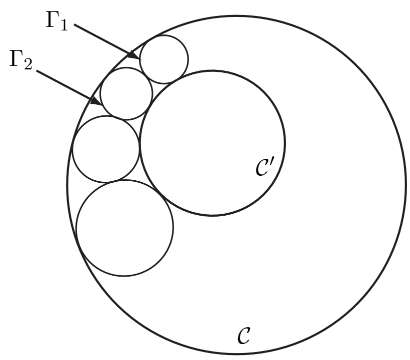

FIGURE 17

$\Gamma_{n+1} = \Gamma_1$, alors le même résultat est vrai, pour n'importe quel Γ_1 et avec le même n.

Exercice 108. Dans un faisceau de cercles, il y a une droite, l'axe radical. Dans un faisceau de coniques, il n'y a que des coniques. Est-ce une contradiction ?

Exercice 109. Qu'est, dans un plan affine euclidien, un faisceau de coniques bitangentes (comme sur l'avant dernier dernier dessin de la figure 16) dont les points bases sont les points cycliques ?

10. Autour du théorème de Pascal

***Exercice 110* (Le théorème de Pascal pour les cercles)**. On considère six points A, B, C, D, E et F d'un cercle $\mathcal{C}$. On suppose que l'hexagone $ABCDEF$ n'a pas de côtés parallèles. On considère les points d'intersection

$$S = AB \cap DE, \quad T = CD \cap AF \quad \text{et} \quad U = BC \cap EF.$$

On veut montrer que S, T et U sont alignés (figure 18). Soient P, Q et R les points d'intersection $CD \cap FE$, $FE \cap AB$ et $AB \cap CD$. En considérant les droites SDE, ATF et BCU comme des transversales aux côtés de PQR, montrer l'égalité

$$\frac{\overline{SQ}}{\overline{SR}} \cdot \frac{\overline{TR}}{\overline{TP}} \cdot \frac{\overline{UP}}{\overline{UQ}} = 1$$

et conclure.

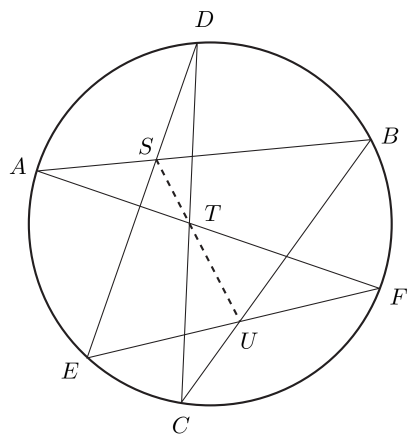

FIGURE 18. Théorème de Pascal

Exercice 111. On donne deux cordes parallèles AB et CD d'un cercle de centre O. Montrer que les angles au centre $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$ et $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB})$ sont égaux.

Soient $\mathcal{C}$ un cercle et D_1, D_2, D_3 trois directions de droites. Soit M_0 un point de $\mathcal{C}$, M_1 l'autre point d'intersection de la parallèle à D_1 passant par M_0 et de $\mathcal{C}$, M_2 l'autre point d'intersection de la parallèle à D_2 passant par M_1 et de $\mathcal{C}$, *etc.* On définit ainsi des points M_i pour $i \geq 0$. Montrer que $M_6 = M_0$ (figure 19).

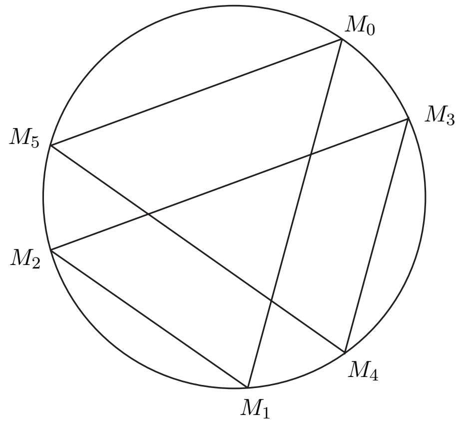

FIGURE 19

Exercice 112. Soient $\mathcal{C}$ une conique d'un plan affine et D_1, D_2, D_3 trois directions de droites. Soit M_0 un point de $\mathcal{C}$, M_1 l'autre point d'intersection de la parallèle à D_1 passant par M_0 et de $\mathcal{C}$, M_2 l'autre point d'intersection de la parallèle à D_2 passant par M_1 et de $\mathcal{C}$, *etc.* On définit ainsi des points M_i pour tout $i \geq 0$. Montrer que $M_6 = M_0$.

Exercice 113. On donne cinq points a, b, c, d et e du plan. On suppose qu'il existe une unique conique propre $\mathcal{C}$ passant par ces cinq points. Construire (avec la règle seule) un point arbitraire f de $\mathcal{C}$ et la tangente à $\mathcal{C}$ en f.

Exercice 114. Soit $\mathcal{C}$ la conique réunion des deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Que dit le théorème de Pascal si on choisit a, c et e sur $\mathcal{D}$, b, d et f sur $\mathcal{D}'$?

Exercice 115. On donne quatre points A, B, C et D du plan P dont trois quelconques ne sont jamais alignés. Montrer que tout point M du plan distinct de A, B C et D est sur une unique conique du faisceau à points bases A, B, C et D. On donne un scalaire ρ. Décrire l'ensemble

$$\{M \in P \mid [MA, MB, MC, MD] = \rho\}.$$

Exercice 116. Deux triangles ABC et DEF ont leurs côtés tangents à une conique $\mathcal{C}$. Montrer que les six points A, B, C, D, E et F sont sur une même conique $\mathcal{C}'$.

11. Coniques, quadriques, orthogonalité et dualité

Exercice 117. Soit $\mathcal{C}$ une conique dégénérée formée de deux droites sécantes du plan. Soit m un point du plan. Que peut-on dire de l'orthogonal de m par rapport à la conique $\mathcal{C}$?

Exercice 118. Soit $\mathcal{C}$ une conique propre d'un plan affine euclidien. Que peut-on dire de $\mathcal{C}$ sachant que les points cycliques I et J sont conjugués par rapport à $\mathcal{C}$ (c'est-à-dire sachant que la droite IJ coupe $\mathcal{C}$ en A et B avec $[I, J, A, B] = -1$) ?

***Exercice 119* (Quadriques et dualité projective)**. Si $\mathcal{C}$ est une courbe d'un plan projectif $P(E)$ on définit $\widetilde{\mathcal{C}} \subset E$ par

$$v \in \widetilde{\mathcal{C}} \text{ si et seulement si } p(v) \in \mathcal{C}.$$

(1) Vérifier que $\widetilde{\mathcal{C}}$ est un *cône*[8]. On dit que la droite projective d de $P(E)$ est tangente à $\mathcal{C}$ en m si $d = P(F)$ pour un plan vectoriel F de E tangent à $\widetilde{\mathcal{C}}$ le long de la droite vectorielle m de E.

Vérifier que, si $\mathcal{C}$ est une conique, la tangente en m à $\mathcal{C}$ définie ainsi coïncide avec la tangente au sens naïf.

(2) L'ensemble des droites projectives tangentes à $\mathcal{C}$ forme une courbe $\mathcal{C}^\star$ de $P(E^\star)$. Montrer que si $\mathcal{C}$ est une conique propre, $\mathcal{C}^\star$ est aussi une conique. La figure 20 représente la courbe $\mathcal{C}^\star$ quand $\mathcal{C}$ est une ellipse. Plus généralement, si $\mathcal{C}$ est une quadrique d'un espace projectif $P(E)$ de dimension n,

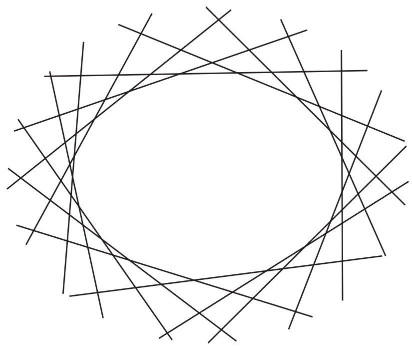

FIGURE 20

montrer que la famille des hyperplans projectifs tangents à $\mathcal{C}$ est une quadrique de l'espace projectif $P(E^\star)$ (voir au besoin l'exercice 47).

(3) On revient au cas du plan. Comment les propriétés d'intersection de $\mathcal{C}^\star$ avec les droites de $P(E^\star)$ se traduisent-elles dans $P(E)$? Démontrer le théorème de Brianchon : si un hexagone a tous ses côtés tangents à une conique propre, alors ses diagonales sont concourantes (figure 21).

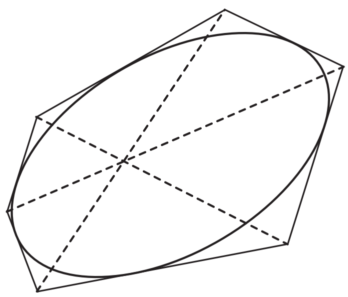

FIGURE 21

[8] C'est-à-dire que, si $\widetilde{\mathcal{C}}$ contient v, il contient toute la droite engendrée par v.

(4) On donne cinq droites générales d'un plan projectif. Combien existe-t-il de coniques tangentes à ces cinq droites ? On donne quatre droites générales d'un plan affine. Combien y a-t-il de paraboles tangentes à ces quatre droites (voir aussi l'exercice 23) ?

Exercice 120. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux coniques (complexes). Combien y a-t-il de droites tangentes à la fois à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$?

***Exercice 121* (Autour du grand théorème de Poncelet)**. On donne deux coniques $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. Dans le produit $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'^{\star}$, on considère

$$\mathcal{I} = \{(m, \ell) \mid m \in \ell\}$$

et l'application

$$\begin{aligned} p : \mathcal{I} &\longrightarrow \mathcal{C} \\ (m, \ell) &\longmapsto m. \end{aligned}$$

Combien y a-t-il de points dans $p^{-1}(m)$?

On considère aussi la transformation $\tau : \mathcal{I} \to \mathcal{I}$ définie par $\tau(m, \ell) = (m', \ell')$, où m' est le deuxième point d'intersection de ℓ et de $\mathcal{C}$, ℓ' est la deuxième tangente à $\mathcal{C}'$ issue de m'. Vérifier que τ est ainsi bien définie.

Le ≪ grand théorème de Poncelet ≫ affirme que, s'il existe m_0, ℓ_0 et un entier n tels que $\tau^n(m_0, \ell_0) = (m_0, \ell_0)$, alors pour tout choix de (m, ℓ), on a aussi $\tau^n(m, \ell) = (m, \ell)$ (pour le même n). C'est un résultat difficile. Voici deux exemples :

(1) On suppose que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont deux cercles concentriques. Démontrer le grand théorème de Poncelet dans ce cas.

(2) On revient au cas général. On suppose qu'il existe (m_0, ℓ_0) tel que $\tau^3(m_0, \ell_0) = (m_0, \ell_0)$. Montrer qu'alors pour tout choix de (m, ℓ), on a aussi $\tau^3(m, \ell) = (m, \ell)$ (voir l'exercice 116).

***Exercice 122* (Familles homofocales)**. On se place dans un plan euclidien muni d'un repère orthonormé, on donne deux nombres réels α et β (on suppose que $0 < \alpha < \beta$) et on considère la conique $\mathcal{C}_\lambda$ d'équation

$$\frac{x^2}{\alpha - \lambda} + \frac{y^2}{\beta - \lambda} = 1.$$

Dessiner sur la même figure la conique $\mathcal{C}_\lambda$ pour $\lambda < \alpha$, pour $\alpha < \lambda < \beta$ et pour $\beta < \lambda$. Montrer que toutes les $\mathcal{C}_\lambda$ ont les mêmes foyers. Les coniques $\mathcal{C}_\lambda$ sont dites *homofocales*.

On complète le plan en un plan projectif et on considère la famille des coniques duales des $\mathcal{C}_\lambda$ (comme dans l'exercice 119). Montrer que c'est un faisceau (linéaire) de coniques.

Plus généralement, on considère dans un espace affine euclidien de dimension n les quadriques $\mathcal{C}_\lambda$ d'équations

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1 - \lambda} + \cdots + \frac{x_n^2}{\alpha_n - \lambda} = 1,$$

où les α_i sont des nombres réels fixés tels que $0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n$. Vérifier que la famille duale est un faisceau de quadriques. Par analogie avec le cas des coniques, on dit que cette famille est *homofocale*.

Montrer qu'un point général de l'espace est contenu dans exactement n quadriques de la famille et que celles-ci sont orthogonales (c'est un théorème de Jacobi).

Montrer qu'une droite générale est tangente à $n - 1$ quadriques de la famille et que les hyperplans tangents à ces quadriques en les points de tangence sont orthogonaux (c'est un théorème de Chasles).

***Exercice 123* (Coniques réelles)**. On a vu que le complémentaire d'une droite dans $\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$ est connexe. Que peut-on dire du complémentaire d'une conique dans $\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$?

***Exercice 124* (Cubiques réelles)**. On considère, dans $\mathbf{R}^2$, la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y^2 = P(x)$, où P est un polynôme de degré 3 dont on suppose qu'il n'a pas de racine multiple. Dessiner $\mathcal{C}$. Combien a-t-elle de composantes connexes ? Montrer qu'une des composantes est non bornée et homéomorphe à une droite et que, s'il en existe une deuxième, celle-ci est homéomorphe à un cercle.

On considère maintenant la courbe $\widehat{\mathcal{C}}$ d'équation homogène $y^2 z = \widehat{P}(x, z)$ (où $\widehat{P}$ est le polynôme homogène de degré 3 en deux variables obtenu en homogénéisant le polynôme P). Montrer que $\widehat{\mathcal{C}}$

s'obtient en ajoutant un point à $\mathcal{C}$. Combien $\widehat{\mathcal{C}}$ a-t-elle de composantes connexes ? À quoi sont-elles homéomorphes ?

Montrer que le complémentaire dans $\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$ de la composante de $\widehat{\mathcal{C}}$ qui contient le point à l'infini est connexe. Si $\mathcal{C}$ a une deuxième composante connexe, que peut-on dire du complémentaire de cette composante dans $\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$?

Exercice 125 **(Involution définie par un faisceau de coniques sur une droite, examen juin 2007)**

(1) Soit D une droite d'un plan projectif réel et soit $\mathcal{C}$ une conique propre de ce plan, tangente à D en un point a. On retire D au plan, obtenant un plan affine réel $\mathcal{P}$ dont D est la droite à l'infini.

(a) Que peut-on dire de la conique affine $\mathcal{C} \cap \mathcal{P}$?

(b) Le point à l'infini a est une direction de droites de $\mathcal{P}$. Comment cette direction s'interprète-t-elle en termes de la conique affine ?

(2) Soit α une homographie d'une droite projective réelle D. On suppose que $\alpha \neq \mathrm{Id}$ et que $\alpha \circ \alpha = \mathrm{Id}$.

(a) Montrer que si α a un point fixe (réel), alors elle en a exactement deux.

(b) On suppose que α a deux points fixes réels a et b. Montrer que pour tout $p \in D$,

$$[a, b, p, \alpha(p)] = -1.$$

(3) Soit $\mathcal{F}$ un pinceau de coniques d'un plan projectif réel et soit D une droite ne contenant aucun des points bases de $\mathcal{F}$.

(a) Montrer que, par tout point de D, il passe une unique conique de $\mathcal{F}$.

(b) Pour tout $a \in D$, l'unique conique de $\mathcal{F}$ passant par a rencontre $\mathcal{F}$ en deux points a et b. Montrer que $a \mapsto b$ définit une homographie involutive de la droite D.

(c) Comment les points fixes de δ s'interprètent-ils ?

(4) Soit $\mathcal{F}$ un pinceau de coniques d'un plan affine euclidien $\mathcal{P}$. On suppose qu'aucun des points bases de $\mathcal{F}$ n'est sur la droite à l'infini de $\mathcal{P}$. ci-dessus, $\mathcal{F}$ définit une involution δ de la droite à l'infini.

(a) Rappeler pourquoi l'orthogonalité des droites affines (pour la structure euclidienne) définit une homographie (involutive) de la droite à l'infini. On note cette involution σ. Montrer que σ fixe les points cycliques I et J.

(b) Un exemple. Quelle est la nature des coniques affines euclidiennes d'équations respectives, dans un repère orthonormé, $xy = 1$, $x^2 - y^2 = 1$? Quels sont leurs points à l'infini ? Quelle est l'involution δ définie sur la droite à l'infini par le pinceau $\mathcal{F}$ engendré par ces deux coniques ? Ce pinceau contient-il un cercle ?

(c) On revient au cas général. On suppose maintenant que $\mathcal{F}$ contient un cercle. Montrer que δ échange les points cycliques I et J. Montrer que δ et σ commutent.

(d) Montrer que (toujours sous l'hypothèse que $\mathcal{F}$ contient un cercle), $\mathcal{F}$ contient exactement deux paraboles et que leurs axes sont orthogonaux.

(e) On suppose réciproquement que δ et σ commutent, mais que $\delta \neq \sigma$. Montrer que δ échange I et J et que $\mathcal{F}$ contient un cercle.

Références

[1] E. Artin – *Algèbre géométrique*, Cahiers scientifiques, Gauthier-Villars, 1967.

[2] M. Audin – *Géométrie*, Edp-Sciences, 2006, deuxième édition.

[3] M. Berger – *Géométrie*, CEDIC, 1977, Réédition Nathan, 1990.

[4] H. S. M. Coxeter & S. L. Greitzer – *Redécouvrons la géométrie*, Dunod, 1971, Réédition Gabay, 1997.

[5] R. Deltheil & D. Caire – *Géométrie & Compléments de géométrie*, 1951, Réimpression Gabay.

[6] J. Frenkel – *Géométrie pour l'élève professeur*, Actualités scientifiques et industrielles, Hermann, 1973.

[7] A. Gramain – *Géométrie élémentaire*, Hermann, 1997.

[8] C. Lebossé & C. Hémery – *Géométrie, classe de mathématiques*, Nathan, 1961, Réimpression Gabay 1990.

[9] J. Lelong-Ferrand – *Les fondements de la géométrie*, Presses Universitaires de France, 1985.

[10] V. Lespinard & R. Pernet – *Géométrie, Terminale C*, André Desvignes, 1967.

[11] D. Perrin – *Géométrie algébrique*, Savoirs actuels, InterÉditions, 1995.

[12] F. Rouvière – *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*, Cassini Paris, 2003, Deuxième édition revue et augmentée.
[13] P. Sauser – *Algèbre et géométrie*, Ellipses, 1986.
[14] J.-C. Sidler – *Géométrie projective*, InterÉditions, 1993.
[15] R. Silverman – *Introductory complex analysis*, Dover, 1972.

Michèle Audin, Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur et CNRS
E-mail : Michele.Audin@math.u-strasbg.fr • *Url :* http://www-irma.u-strasbg.fr/~maudin