Le théorème de Müntz

- A - Matrice et déterminant de Gram

Soit $(H, (\cdot\,|\,\cdot))$ un espace préhilbertien sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_1, \ldots, f_n \in H$, on pose

$$\mathcal{G}(f_1, \ldots, f_n) = \big[(f_k|f_\ell)\big]_{k,\ell=1,\ldots,n}, \qquad G(f_1, \ldots, f_n) = \det \mathcal{G}(f_1, \ldots, f_n),$$

ce sont la matrice et le déterminant de Gram de $(f_1, \ldots, f_n)$.

1. En étudiant la forme hermitienne Φ définie sur K^n par

$$(z_1, \ldots, z_n) \in K^n, \quad \Phi(z_1, \ldots, z_n) = ||\sum_{k=1}^{n} z_k f_k||^2,$$

montrer que $G(f_1, \ldots, f_n) \geq 0$ et que $G(f_1, \ldots, f_n) > 0$ si et seulement si $f_1, \ldots, f_n$ sont linéairement indépendants.

2. On suppose maintenant les vecteurs $f_1, \ldots, f_n$ linéairement indépendants et l'on pose F le sous-espace vectoriel engendré par $\{f_1, \ldots, f_n\}$. Soit $h \in H$ et $g = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k$ la projection orthogonale de h sur F.

(a) Vérifier que, si Λ est la matrice colonne des λ_k, $k = 1, \ldots, n$, et Γ la matrice colonne des $(h|f_k)$, $k = 1, \ldots, n$, on a $\Lambda = \mathcal{G}(f_1, \ldots, f_n)^{-1}\Gamma$.

(b) On pose $\delta = d(h, F)$. Établir la relation $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k (f_k|h) = (h|h) - \delta^2$. En écrivant la condition de compatibilité des $n+1$ équations aux inconnues λ_k, $k = 1, \ldots, n$, prouver que

$$\delta^2 = \frac{G(f_1, \ldots, f_n, h)}{G(f_1, \ldots, f_n)}.$$

- B - Un système total de $L^2([0,1])$

H est l'espace de Hilbert $L^2([0,1])$. Soient $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, une suite strictement croissante de réels positifs. On définit les fonctions f_k de H par $f_k(x) = x^{\alpha_k}$. On pose $F_n = \mathrm{vect}\{f_1, \ldots, f_n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, et $F = \mathrm{vect}\{f_n : n \geq 1\}$.

3. Soit $\alpha \geq 0$ et $h \in H$ définie par $h(x) = x^\alpha$. Montrer que l'on a

$$d(h, F_n) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha+1}} \prod_{k=1}^{n} \frac{|\alpha - \alpha_k|}{\alpha + \alpha_k + 1}.$$

On rappelle la formule permettant le calcul d'un **déterminant de Cauchy**.

Soit $n \geq 1$ et $(a_i)_{i=1}^n$, $(b_i)_{i=1}^n \in \mathbb{C}^n$ telles que, pour tout $i, j = 1, \ldots, n$, $a_i + b_j \neq 0$. On pose

$$\Delta_n = \det\Big[\frac{1}{a_i + b_j}\Big]_{i,j=1,\ldots,n}.$$

Pour tout $n \geq 1$, on a

$$\Delta_n = \frac{\prod_{i<j}(a_j - a_i)\prod_{i<j}(b_j - b_i)}{\prod_{i,j}(a_i + b_j)}.$$

On désigne par $\mathcal{P}$ le sous-espace de H formé des fonctions polynômes, et par p_ℓ le monôme de degré ℓ.

4. Prouver que, si $\sum_{k\geq 1} \alpha_k^{-1} = +\infty$, alors $\mathcal{P} \subset \overline{F}$, (on notera, en particulier, que, lorsque $\sup_{k\geq 0} \alpha_k < +\infty$, on a $\sup_{k\geq 0} \frac{|\ell-\alpha_k|}{\ell+\alpha_k+1} < 1$). En déduire que $\overline{F} = H$.

5. On suppose que $\sum_{k\geq 1} \alpha_k^{-1} < +\infty$. Justifier l'existence d'un entier $\ell_0 > 0$ tel que $\ell_0 \notin \{\alpha_k : k \geq 1\}$. Montrer que $\lim_n d(p_{\ell_0}, F_n) > 0$.

6. Conclure.

- C - Le théorème de Müntz

Soit $\big(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty\big)$ l'espace des fonctions numériques continues sur $[0,1]$, muni de la norme de la convergence uniforme. Soient $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$, une suite strictement croissante de réels tels que $\alpha_0 = 0$. On note f_k, $k \geq 0$, les fonctions puissances correspondantes et M le sous-espace vectoriel engendré.

7. On suppose que $\sum_{k\geq 1} \alpha_k^{-1} = +\infty$.

(a) Vérifier que, si $f \in C^1([0,1])$ et $f(0) = 0$, alors $\|f\|_\infty \leq \|f'\|_2$. Établir que, si $\alpha_1 \geq 1$, M est dense dans $C([0,1])$.

(b) En utilisant un changement de variable convenable, prouver que l'on peut s'affranchir de la condition $\alpha_1 \geq 1$.

8. Montrer que, pour que M soit dense dans $C([0,1])$, il faut et il suffit que $\sum_{k\geq 1} \alpha_k^{-1} = +\infty$.

Remarques bibliographiques

On pourra retrouver tous les résultats ci-dessus dans les Gourdon :

– matrice et déterminant de Gram : [Gou94a, p. 259],
– déterminant de Cauchy : [Gou94a, p. 144],
– théorème de Müntz (version L^2 et version L^∞) : [Gou94b, p. 287].

On peut aussi consulter [CLF95].

Références

[CLF95] A. Chambert-Loir et S. Fermigier – *Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 2*, Masson, 1995.

[Gou94a] X. Gourdon – *Algèbre*, Ellipses, 1994.

[Gou94b] — , *Analyse*, Ellipses, 1994.