RMS 6842 Sep 99 - Espaces hermitiens
Début de corrigé

Michel Coste

2 octobre 2010

H est un espace hermitien, $B(H)$ est l'espace des endomorphismes de H. Pour $T \in B(H)$, on pose $w(T) = \sup\{|\langle x, Tx\rangle|,\ \|x\| = 1\}$.

Première Partie

On étudie $w(T)$. Une première chose qu'il est bon de remarquer est que $w(T) \leq \|T\|$. En effet d'après Cauchy-Schwarz, on a, pour $\|x\| = 1$,

$$|\langle x, Tx\rangle| \leq \|x\| \cdot \|Tx\| = \|Tx\| \ .$$

1) Quand T est hermitien. On doit se souvenir que T diagonalise dans une base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres associées (elles sont réelles). Si $x = \sum_{i=1}^n a_i e_i$, avec $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |a_i|^2} = 1$, alors $\|Tx\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 |a_i|^2}$, et donc $\|T\| = \max\{|\lambda_i|\}$. Supposons $\|T\| = |\lambda_1|$. Comme $\langle e_1, Te_1\rangle = \lambda_1$, on en déduit $w(T) = \|T\|$.

Soit maintenant $T \in B(H)$ quelconque. On sait déjà que $w(T) \leq \|T\|$. On peut écrire T comme

$$T = \frac{T + T^*}{2} + i\,\frac{T - T^*}{2i} \ .$$

Les deux applications $S = \dfrac{T + T^*}{2}$ et $S' = \dfrac{T - T^*}{2i}$ sont hermitiennes. On a

$$\|T\| \leq \|S\| + \|S'\| = w(S) + w(S') \ .$$

Par ailleurs, de $\langle x, Sx\rangle = \dfrac{1}{2}\left(\langle x, Tx\rangle + \langle x, T^* x\rangle\right) = \Re(\langle x, Tx\rangle)$, on déduit $w(S) \leq w(T)$. De même, de $\langle x, S'x\rangle = \Im(\langle x, Tx\rangle)$ on déduit $w(S') \leq w(T)$. On a donc $w(S) + w(S') \leq 2w(T)$, ce qui nous donne

$$\frac{1}{2}\|T\| \leq w(T) \leq \|T\| \ .$$

On suppose $w(T) \leq 1$ et $|z| < 1$. Montrons que, pour tout x tel que $\|x\| = 1$, on a $(\mathrm{Id} - zT)(x) \neq 0$. Il suffit de voir que $\langle x, (\mathrm{Id} - zT)(x)\rangle \neq 0$. Or

$$|\langle x, (\mathrm{Id} - zT)(x)\rangle| = |1 - z\langle x, Tx\rangle| \geq 1 - |z| w(T) > 0 \ .$$

On en déduit que $\mathrm{Id} - zT$ est inversible.

On a $\sup\{|\Re(e^{i\theta}\langle x,Tx\rangle|,\theta\in\mathbb{R}\}=|\langle x,Tx\rangle|$, et donc

$$w(T)=\sup\{|\Re(e^{i\theta}\langle x,Tx\rangle|,\|x\|=1,\theta\in\mathbb{R}\}\ .$$

Or

$$\Re(e^{i\theta}\langle x,Tx\rangle=\frac{1}{2}\left(e^{i\theta}\langle x,Tx\rangle+e^{-i\theta}\overline{\langle x,Tx\rangle}\right)=\frac{1}{2}\left(\langle x,e^{i\theta}Tx\rangle+\langle x,e^{-i\theta}T^*x\rangle\right)\ .$$

Par conséquent, et puisque $e^{i\theta}T+e^{-i\theta}T^*$ est hermitien,

$$\sup\{|\Re(e^{i\theta}\langle x,Tx\rangle|,\|x\|=1\}=\frac{1}{2}w(e^{i\theta}T+e^{-i\theta}T^*)=\frac{1}{2}\|e^{i\theta}T+e^{-i\theta}T^*\|\ .$$

On conclut que

$$w(T)=\frac{1}{2}\sup\{\|e^{i\theta}T+e^{-i\theta}T^*\|,\theta\in\mathbb{R}\}\ .$$

2) On considère d'abord le cas où $\dim(H)=2$ et T a pour matrice $\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ dans une base orthonormale (e_1,e_2). Si $x=a_1e_1+a_2e_2$, alors $Tx=a_1e_2$. On en déduit facilement que $\|T\|=1$. Comme $\langle x,Tx\rangle=\overline{a_2}a_1$, si $\|x\|=1$ il vient $|\langle x,Tx\rangle|^2=|a_1|^2(1-|a_1|^2)$ et le maximum de cette dernière quantité pour $|a_1|\leq 1$ est $\frac{1}{4}$. Donc $w(T)=\frac{1}{2}$.

On revient à H de dimension finie quelconque et on suppose que $\|T\|=1$ et $w(T)=\frac{1}{2}$. D'après la première hypothèse, on peut trouver $e_1\in H$, $\|e_1\|=1$, tel que $\|Te_1\|=1$ (on utilise la compacité de $\{x\in H,\|x\|=1\}$). Posons $e_2=Te_1$ et calculons

$$\langle T^*e_2,e_1\rangle=\langle e_2,Te_1\rangle=\langle Te_1,Te_1\rangle=1\ .$$

On est donc dans le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz $|\langle T^*e_2,e_1\rangle|\leq\|T^*e_2\|\cdot\|e_1\|\leq 1$ (car $\|T^*\|=\|T\|=1$ [1]). Ceci entraîne $T^*e_2=ze_1$ avec $|z|=1$. Alors $\langle T^*e_2,e_1\rangle=\overline{z}=1$ et donc $T^*e_2=e_1$.

D'après l'expression pour $w(T)$ obtenue en 1) et la deuxième hypothèse, on a $\sup\{\|e^{i\theta}Te_2+e^{-i\theta}T^*e_2\|,\theta\in\mathbb{R}\}\leq 1$, et donc

$$\|e^{i\theta}Te_2+e^{-i\theta}e_1\|^2=\|Te_2\|^2+1+2\Re(e^{2i\theta}\langle e_1,Te_2\rangle)\leq 1$$

pour tout $\theta\in\mathbb{R}$. Comme on peut choisir θ pour que le dernier terme de la somme soit positif ou nul, on doit avoir $\|Te_2\|^2=0$ et donc $Te_2=0$. Un raisonnement du même type, à partir de $\sup\{\|e^{i\theta}Te_1+e^{-i\theta}T^*e_1\|,\theta\in\mathbb{R}\}\leq 1$, montre que $T^*e_1=0$.

On calcule

$$\langle e_1,e_2\rangle=\langle e_1,Te_1\rangle=\langle T^*e_1,e_1\rangle=0\ .$$

Donc, (e_1,e_2) est une base orthonormale d'un sous-espace de dimension 2 de H, stable par T et par T^*, et la matrice de la restriction de T dans cette base est $\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$

1. On montre $\|T^*\|=\|T\|$ en remarquant que

$$\|T\|=\sup_{\|x\|=1}(\|Tx\|)=\sup_{\|x\|=1}\sup_{\|y\|=1}|\langle y,Tx\rangle|=\sup_{\|y\|=1}\sup_{\|x\|=1}|\langle x,T^*y\rangle|=\|T^*\|\ .$$

Deuxième partie

On travaille dans $\mathbb{C}^n$ muni de sa structure hermitienne standard.

1) Soit

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}) \ .$$

On cherche les vecteurs propres de A_n de la forme $(\sin\theta, \sin 2\theta, \dots, \sin n\theta)$. L'image d'un tel vecteur par A_n est

$$(2\sin\theta\cos\theta, 2\sin 2\theta\cos\theta, \dots, 2\sin(n-1)\theta\cos\theta, \sin(n-1)\theta) \ .$$

Les θ pour lesquels on obtient un vecteur propre sont ceux tels que

$$\sin(n-1)\theta = 2\sin n\theta\cos\theta \ ,$$

c'est-à-dire ceux tels que $\sin(n+1)\theta = 0$ (mais $\sin\theta \neq 0$). On obtient donc des vecteurs propres pour $\theta = k\pi/(n+1)$ avec $k = 1, \dots, n$, et les valeurs propres associées sont $2\cos\dfrac{k\pi}{n+1}$.

Vu que A_n est hermitienne, sa norme est égale à la plus grande valeur absolue de valeur propre, soit $2\cos\dfrac{\pi}{n+1}$.

Soit

$$S_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}) \ .$$

On a $\|S_n x\| \leq \|x\|$ et $S_n e_1 = e_2$ (e_i vecteurs dee la base canonique). Donc $\|S_n\| = 1$.

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, la matrice $e^{i\theta}S_n + e^{-i\theta}S_n^*$ est égale à $P^{-1}A_nP$, où P est la matrice diagonale unitaire $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{i\theta} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{(n-1)i\theta} \end{pmatrix}$. Donc sa norme est égale à $2\cos\dfrac{\pi}{n+1}$. On en déduit, grâce à la formule de la première partie, question 2), que $w(S_n) = \cos\dfrac{\pi}{n+1}$.

Troisième Partie

1) Soit $\beta = (\beta_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice telle que $\beta_{1,1} = 0$. On pose $\beta_{k,l} = 0$ si $k \geq n+1$ ou $l \geq n+1$. Soit $\gamma = (\gamma_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice définie par $\gamma_{i,j} = \beta_{i,j} - \beta_{i+1,j+1}$. On suppose que γ est hermitienne positive : $\forall x \in \mathbb{C}^n$ $\langle x, \gamma x\rangle \geq 0$.

On a $\beta_{1,2} = \gamma_{1,2}+\gamma_{2,3}+\cdots+\gamma_{n-1,n}$. Montrons que $|\gamma_{i,i+1}| \leq (\gamma_{i,i}\gamma_{i+1,i+1})^{1/2}$ (c'est la démonstration de Cauchy-Schwarz). On choisit un réel θ tel que $e^{i\theta}\gamma_{i,i+1}$ soit réel. En appliquant la positivité de γ pour le vecteur $\lambda e_i + \mu e^{i\theta} e_{i+1}$ où λ, μ sont réels (e_i vecteur de la base canonique), on obtient

$$\gamma_{i,i}\lambda^2 + 2e^{i\theta}\gamma_{i,i+1}\lambda\mu + \gamma_{i+1,i+1}\mu^2 \geq 0$$

pour tous les réels λ, μ, ce qui entraîne $|\gamma_{i,i+1}|^2 - \gamma_{i,i}\gamma_{i+1,i+1} \leq 0$, d'où (en remarquant que les coefficients diagonaux de γ sont positifs ou nuls) $|\gamma_{i,i+1}| \leq (\gamma_{i,i}\gamma_{i+1,i+1})^{1/2}$. On en déduit

$$|\beta_{1,2}| \leq (\gamma_{1,1}\gamma_{2,2})^{1/2} + (\gamma_{2,2}\gamma_{3,3})^{1/2} + \cdots + (\gamma_{n-1,n-1}\gamma_{n,n})^{1/2} \ .$$

Le deuxième membre de cette inégalité est égal à $\langle x, S_n x\rangle$ où $x = (\gamma_{1,1}^{1/2}, \ldots, \gamma_{n,n}^{1/2})$. On a $\|x\| = 1$, car $\gamma_{1,1} + \cdots + \gamma_{n,n} = \beta_{1,1} = 1$. Donc, $|\beta_{1,2}| \leq w(S_n)$.

2) Soit $T \in B(H)$ tel que $\|T\| = 1$ et $T^n = 0$ (ici n n'a a priori pas de rapport avec $\dim H$). Soit $x \in H, \|x\| = 1$, et posons $\beta_{i,j} = \langle T^{i-1}x, T^{j-1}x\rangle$ (remarquer qu'on a bien $\beta_{1,1} = 1$ et $\beta_{k,l} = 0$ si $k \geq n+1$ ou $l \geq n+1$). Montrons que la matrice γ (avec les notations de 1)) est positive. On a, pour $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$,

$$\langle z, \gamma x\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{z_i} z_j (\langle T^{i-1}x, T^{j-1}x\rangle - \langle T^i x, T^j x\rangle) = \left\|\sum_{i=1}^{n} z_i T^{i-1}x\right\| - \left\|\sum_{i=1}^{n} z_i T^i x\right\| \ .$$

Or comme $\|T\| = 1$, on a

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} z_i T^i x\right\| = \left\|T(\sum_{i=1}^{n} z_i T^{i-1}x)\right\| \leq \left\|\sum_{i=1}^{n} z_i T^{i-1}x\right\| \ ,$$

ce qui montre la positivité de γ.

D'après la question 1), on a $|\langle x, Tx\rangle| = |\beta_{1,2}| \leq w(S_n)$, et ceci pour tout x de norme 1. Donc $w(T) \leq w(S_n)$.